



TITLE:

水利施設の浸透流問題に関する基礎研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

岡, 太郎

CITATION:

岡, 太郎. 水利施設の浸透流問題に関する基礎研究. 京都大学, 1973, 農学博士

ISSUE DATE:

1973-07-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r2365>

RIGHT:



水利施設の浸透流問題 に関する基礎研究

昭和48年3月

岡 太 郎

水利施設の浸透流問題 に関する基礎研究

昭和48年3月

岡 太 郎

目 次

まえがき	1
第1編 Forchheimer 則を適用した基礎地盤浸透流に関する研究	3
第1章 序 論	3
第1節 概 説	3
第2節 従来の研究	4
第3節 研究経過の概要	4
第2章 浸透流の抵抗則	9
第3章 Forchheimer 則を適用した confined seepage の理論	13
第1節 基礎方程式および境界条件	13
第2節 解 法	19
第3節 数値計算に関する考察	25
第4章 矢板のまわりの浸透流についての実験	32
第1節 実験装置と材料および実験概要	32
第2節 透水試験	34
第3節 実験結果	34
第5章 Forchheimer 則を適用した confined seepage 理論の適用	38
第1節 矢板のまわりの浸透流	38
第2節 一列の sheet pile を有する土中の基礎地盤中の浸透流	43
第3節 二列の sheet pile を有する土中の基礎地盤中の浸透流	51
第6章 結 論	58
第2編 自由水面を有する三次元浸透流の解法と適用に関する研究	59
第1章 序 論	59
第1節 概 説	59
第2節 従来の研究	60
第2章 自由水面を有する定常三次元浸透流の解析法	65
第1節 基礎方程式および境界条件	65
第2節 数値計算法	66
第3節 解析手法に関する考察	71

ま え が き

近年社会経済の高度の発展に伴い、水需要はますます増大の傾向にあって、農業用水のみならず工業・都市用水の確保は重要な問題になっている。このような背景の下に各地でカンガイ事業が行なわれ、河川に各種の水利施設が設置され、社会的要求に答えている。ここで河川に設置される主な施設は、貯水を目的とした各種ダム、および取水を目的とした頭首工などが考えられるが、これら構造物がその機能を発揮するためには十分な止水性を有しかつ安定であることが基礎的必要条件である。

このような河川に設置される諸施設は、頭首工などにみられるように粗砂の滞積物より構成される河床に設置される場合と、アースダム、河川堤防などのように設置条件、経済的效果を考慮して、盛土構造物形式をとる場合があるが、これらの構造物では基礎地盤または盛土内に水の浸透現象が認められ、これが構造物の止水性・安定性に重要な影響をおよぼしている。したがって、水利施設に関する浸透流現象の究明は、その構造物の効果と安全性を検討する上できわめて重要であり、古くから研究が行なわれ、かなりの成果が得られてきた。しかし、浸透流現象はきわめて複雑であるため現在未解明な問題も多い。また関連分野の研究の進展に伴い、従来の手法の再検討を必要とする問題もいくつかでてきている。本論文は、このように未解明であり検討を必要としている浸透問題のうち次の二課題について水理学的研究を進め、その結果をまとめたものである。

まずはじめに、浸透流の抵抗則の問題がある。これについては最近急速に研究が進み、従来多くの問題に適用されてきたDarcy則だけでは浸透流の問題を十分解明できないことが知られてきた。すなわちDarcy則の適用限界外のいわゆる非Darcy流を考慮して扱われるべきいくつかの問題のあることがわかってきたが、基礎地盤内の浸透流に関する問題についてはあまり研究は行なわれておらず未解明な問題が多く残されている。そこで非Darcy流を考慮した基礎地盤中の浸透問題を水理学的に究明することを目的として、抵抗則にForchheimer則を可能な範囲内で適用することにより非Darcy流を取り扱い、理論的、実験的に基礎研究を行なった。本論文の第1編にはその研究結果と問題の解決の方向が示してある。

次に、アースダムや河川堤防中の自由水面を有する浸透流の問題がある。このような構造物では、基礎地盤内の流れとは異なり局所的な高速浸透流が現われることはほとんどなく、したがってDarcy則の適用にそれほど問題はなと考えられているが、自由水面の位置形状が解析当初未知であるため、この問題の解析手法は煩雑となり、従来の解法では適用系も限られるので未解

明な事象が数多く残されている。そこでこれまで確立されていなかった自由水面を有する三次元浸透流の解析手法について研究を進め、数値解法を提示し、その有用性と解法の特性を吟味したのち、この手法をアースダム浸透流に適用し、三次元流特性の解明を試みた。最後に、最近特に重要となりつつある広域地下水問題へこの解法を適用し、適用上の問題点について若干の考察を加え、広域地下水の制御問題の解決の方向を明らかにしようとした。第2編にこれらの研究結果をまとめてある。

第1編 Forchheimer 則を適用した基礎地盤 浸透流に関する研究

第1章 序 論

第1節 概 説

頭首工、コンクリートダムなど、河川に設置されるコンクリート構造物の安定性・貯水効果を検討する際に、その基礎地盤を流れる浸透水の挙動を無視することはできない。すなわち、構造物の基礎に作用する水圧の分布、地盤内に発生する水頭集中現象、流速の増大に伴い発生しやすいパイピング現象や漏水問題など、構造物の安全性・構築効果に係る諸現象の定量的な説明・評価は、構造物下の浸透流の水理学的挙動を解明してはじめて可能になるものである。一般に、この種の浸透問題は、自由水面をもたず、上下流面が貯水部に接続しかつ上面が不透面に囲まれた領域内の流れであることから、*confined seepage*問題と呼ばれ、基礎の性状によってはかなりの高速浸透流が発生することがあり、構造物破壊の素因になることもある。従来この種の問題はDarcy則の成立を前提として導かれるpotential flowとして扱われるのが通例であったが、このような解析手法を用いると、頭首工止水壁先端部で流速が無限大になってしまうなど、現実とは一致しない答が得られ、また流速の大きい領域ではDarcy則の不成立が予想されることからpotential flowとして得られる解析結果は必ずしも十分現象を説明しているとはいえない。

そこで本研究では、Darcy 則のかわりに、porous media内の乱流状態ないし遷移状態の流れに対して成立するといわれ、かつ実験的にも理論的にも実用性が裏付けられているForchheimer 則を用いてconfined seepage問題を取り扱い、その一般的解法の確立およびこの浸透流の特性の解明を試みる。

本研究では、はじめForchheimer則を適用した場合の基礎方程式の誘導とその解法の検討、そして矢板のまわりの流れについての実験結果との比較より理論解の有用性について基礎的研究を行ない、次に水利構造物に実際みられる系について解析を行ない、potential flowとした場合の解との比較からその流れの特性を明らかにする。

この研究の結果、いくつかの制約はあるが、Forchheimer則を適用したconfined seepage問題の解析が可能となり、構造物設計上十分予想される諸問題たとえば止水壁設置効果、堤体底面に作用する揚圧力分布などの検討が可能となり、水利構造物の設計上有益な資料を与えるものと考えられる。

第2節 従来の研究

浸透流に関する研究は1856年のH. Darcyによる線形抵抗則¹⁾(Darcy則)の発見にはじまる。その後この法則を適用することによって多くの問題が検討されてきた。とくに一様なporous media中のconfined seepageの問題は、Darcy則と連続の法則とから得られるラプラス方程式を基礎式とするpotential flowとして数多く扱われてきている。この手法を用いた研究としてはW. Weaver, M. Muskat, N. N. Pavlovsky, 本間・浜²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾田, 嶋, King などの研究があり, これらの成果の大部分はM. Muskat, R. Dachler, P. Kochina, M. E. Harrなどの成書にまとめられている。さらに境界形状が複雑なため, 複素函数の理論の適用が困難な問題についてはRelaxation methodなどの数値的取り扱いによりかなり良い精度の解を得ることが可能であることから, confined seepage問題がpotential flowとして扱われる限りほとんどの問題は容易に解決できる状態にきているといっても過言ではない。

しかし, potential flowの取り扱いを可能にするDarcy則には適用限界がある。porous media 内の流れが乱流への遷移状態および完全乱流状態になるとDarcy則は成立しなくなる¹³⁾ことが知られており, またporous media によっては低流速の側にも適用限界が存在する¹⁴⁾ともいわれている。そこでDarcy則に従う浸透流をDarcy流, Darcy則が成立しない浸透流をnon-Darcy流と呼んでいる。

さてnon-Darcy流を対象としてconfined seepage 問題を扱った研究は必ずしも多くはない。わが国では昭和18年本間・浜田¹⁵⁾によってnon-Darcy流の存在が指摘されているが, 解析の段階までは進んでいない。その後Franke, Valentin¹⁶⁾は平行流に直角に置かれた平板のまわりの流れについて基礎的な研究を行なっている。すなわち, 彼らはまず透水試験によりnon-Darcy流の抵抗則を求め, 次にその系についてpotential flow として計算した流速分布に, 先に求めた抵抗則をあてはめて, 全損失水頭を近似的に計算し実験結果と対比している。しかし, これはあくまで近似的な取り扱いであり構造物のまわりの様相を十分解明しているとはいえない。なお, unconfined seepage 問題におけるnon-Darcy流についてはJ. Baturic-Rubčić, P. E. Volker, J. A. McCorquodale, H. C. Ng¹⁷⁾¹⁸⁾¹⁹⁾など, 井戸に関するnon-Darcy流問題ではJ. L. Mogg²⁰⁾などの研究がある。

第3節 研究経過の概要

著者がこの研究に着手したのは1964年である。この時点ではDarcy則の適用限界外の領

域での浸透流の抵抗則に関する研究はいくつかみられたが、この種の抵抗則を現実の浸透問題へ適用した研究はあまり行なわれていなかった。そこで、著者はまず平行流中に直角に設置した平板のまわりの流れを対象として、基礎的研究を開始した。^{21), 22)}

はじめ、かなり高速な浸透流におよぶ実験の結果と potential flow とした場合の理論解との比較から non-Darcy 流のもとで生ずる浸透流の特性を実験的に明らかにしようとした。その結果、浸透流量と動水勾配の間に比例関係が成立せず、また平板のまわりの水頭分布についてもその先端付近で potential flow とした場合の理論解でみられるような水頭の集中が認められないことがわかった。次にこのような理論的取り扱いの不備を補うため、Darcy 則の適用限界を越えると成立するといわれている Forchheimer 則を用いて基礎方程式を誘導し、non-Darcy 流下の諸現象を説明することを試みた。

当初二次元系に適用する Forchheimer 則として次式を用いたが、その研究の概要は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -a u - b |u| u \quad \dots\dots\dots (a) \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -a v - b |v| v \quad \dots\dots\dots (b) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1.1.1)$$

ここで a : 定数 $[L^{-1} T]$ b : 定数 $[L^{-2} T^2]$

h : 水頭 $[L]$ x, y : 座標 $[L]$

u, v : x, y 方向の流速 $[L T^{-1}]$

$[]$: dimension を表す (以下同じ)

(1.1.1) 式と連続の方程式より流れの函数 ψ について基礎方程式を誘導すると (1.1.2) 式を得る。

$u > 0, v \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} &= 2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} \\
 u > 0, v < 0 \text{ のとき} \\
 a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} &= -2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} = 2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} \\ a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} = -2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} } \right\} \dots (1.1.2)$$

また水頭に関する基礎方程式は (1.1.3) 式となる。

$$\begin{aligned}
 u > 0, v \geq 0 \text{ のとき} \\
 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) &= -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
 u > 0, v < 0 \text{ のとき} \\
 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) &= -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) } \right\} \dots (1.1.3)$$

ここで、(1.1.2) 式は非線形方程式であり簡単には解を得ることができないため、(1.1.2) 式を差分方程式に展開して多元連立一次方程式になおし、逐次近似計算法を適用して解析を進めた。当時電子計算機は今日ほど発達普及しておらずせいぜい50元の連立方程式を計算するのが限度であったため、十分な計算が行なえず局所的な non-Darcy 流領域についてのみ解析を進めた。なお (1.1.3) 式中には流れの函数 ψ が含まれているため、単独に水頭値については解析できず、(1.1.3) 式に先きに求められた流れの函数値を代入して、数値的に水頭値を求める手法を採用した。

この基礎的研究によって、従来の理論では説明できなかった前述の現象を定性的に説明することができた。

その後、電子計算機も発達し大容量・高速計算が可能になったので、かなり広範囲な領域について解析を進めるとともに、当初用いた近似的な Forchheimer 則^{23), 24)}を厳密な形で適用すること²⁵⁾に努めた。本論文では厳密な形で Forchheimer 則を用いた成果について述べる。

参 考 文 献

- 1) Darcy, H.: Les fontains publiques de la ville de Dijon, Paris, 1856.

- 2) Weaver, W: Uplift Pressure on Dams, J. Math. and Phys., June, 1932.
- 3) Muskat, M: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw-Hill, New York, 1937.
- 4) Pavlovsky, N. N.: Motion of Water under Dams, Trans. of 1st Congr. on Large Dams, Stockholm, vol. 4, 1933.
- 5) 本間 仁, 浜田徳一: 浸透性基礎の地下水流と揚圧力について '土木学会誌' vol. 30, PP. 72-98, 1944.
- 6) 嶋 祐之: 堤体下部への浸透流に対する変分法的应用 土木学会論文集 29, PP. 98-111, 1955.
- 7) King, G. J. W.: Seepage under a Rectangular Dam, Proc. of A. S. C. E., SM2, vol. 2 pp. 45-64, March, 1967.
- 8) 前出の文献 3)
- 9) Dachler, R.: Grundwasserströmung, Wien, Verlag von Julius Springer, 1936.
- 10) Kochina, P.: Theory of Ground Water Movement, translated by J. M. Roger de Wiest, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1962.
- 11) Harr, M. E.: Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, New York, 1962.
- 12) Shaw, F. S.: Relaxation Method, Dover Publications, Inc, 1953.
- 13) たとえば Kochina, P. 著 前出の文献 10) の P. 17
- 14) たとえば Permeability and Capillarity of Soil. PP. 106-111. published by the American Society for Testing and Materials.
- 15) 前出の文献 5)
- 16) Franke, P. G. and F. Valentin: Head Losses due to Flow under a Vertical Wall between Parallel Plates, Proc. of the 13th Congress of I. A. H. R., vol. 4, PP. 279-285, 1969.

- 17) Baturic-Rubčić, J.: The Study of Non-Linear Flow through Porous Media by Means of Electrical Model, Jour. of Hydraulic Research, vol. 7, No1, PP. 31-65, 1969.
- 18) Volker, R. E. : Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements, Proc. of A. S. C. E. , HY6, vol.95, PP.2093-2114, Nov. , 1969.
- 19) McCorquodale J. A. and H. C. Ng: Non-Darcy Flow Solved by Finite Element Analysis, Proc. of the 13th Congress of I. A. H. R. , vol. 4, PP.347-355, 1969.
- 20) Mogg, Joe, L. : Effect of Aquifer Turbulence of Well on Well Drawdown, Proc. of A. S. C. E. , HY11, PP. 99-112, Nov. , 1959.
- 21) 沢田敏男・岡 太郎： 水利構造物下の浸透流に関する研究(Ⅰ)，
農業土木学会論文集，第17号，PP. 21-27，昭41年10月。
- 22) 沢田敏男・岡 太郎： 水利構造物下の浸透流に関する研究(Ⅱ)，
農業土木学会論文集，第23号，PP. 29-32，昭43年3月。
- 23) 岡 太郎： Forchheimer則を適用した confined seepage.
—河川構造物の浸透問題(1)— 京都大学防災研究所 年報，第12号B，
PP. 401-410，昭40年3月。
- 24) Oka, Taro: A Study on the Seepage around Sheetpile by Applying Forcheimer's Law, Proc. 13th Congress of I. A. H. R. , vol. 4, PP. 135-142, Sep. , 1969.
- 25) Thirriot C: General Report of Hydraulodynamics of Flow in Porous Media, Proc. 13th Congress of I. A. H. R. , vol. 5-2, PP. 355-422, Sep. , 1969.

第2章 浸透流の抵抗則

浸透問題を porous media 内の流体の物理量すなわち微視的な物理量を用いて議論することは主に porous media の間隙構造の複雑さからほとんど不可能であるので、この種のほとんどの問題は微視的な量を巨視的な量に変換して論じられている。そして、この微視的な流れの場を巨視的な流れの場に変換するため、抵抗則が導入され実用に供されている。

抵抗則については、古くから理論的実験的に研究が行なわれており、いくつかの法則が提案されている。その中でもっとも一般的実用的なものとして、1856年にHenry Darcy¹⁾により発見されたいわゆるDarcy則がある。

$$V = -k \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad \dots\dots\dots (1.2.1)$$

ここで V : 巨視的な流速。実存する流体の流速ではなく単位断面を流下する流量を表わし、
流量流速または flow rate とよばれることもある。[$L \ T^{-1}$]

k : 透水係数 [$L \ T^{-1}$]

$\Delta h / \Delta x$: 動水勾配

このDarcy則の理論的誘導についても多くの試みがある。その中でKozeny-Carman²⁾による毛細管モデルが有名で理解しやすい。すなわち、Kozeny-Carmanはporous media中の流れを毛細管中の流れと等価であるとし、毛細管内の粘性流体の流れにHagen-Poiseuilleの解を適用し、次式に示す形でDarcy則を誘導した。

$$\left. \begin{aligned} V &= -k \frac{\Delta h}{\Delta x} \\ k &= \frac{C_s r}{\eta T^2 S^2} \frac{n^3}{(1-n)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.2.2)$$

ただし V : 巨視的な流速 [$L \ T^{-1}$]

k : 透水係数 [$L \ T^{-1}$]

$\frac{\Delta h}{\Delta x}$: 動水勾配

C_s : 形状係数 [$L \ T^{-2}$]

r : 流体密度 [$M \ L^{-3}$]

η : 流体の粘性係数 [$M \ L^{-1} \ T^{-1}$]

T : Tortuosity = 有効流路長 / 試料長

S : 単位体積の湿潤表面積 (L^2 / L^3)

n : 間隙率

この式中には、形状係数、Tortuosity、湿潤表面積など直接測定不可能な係数が用いられており、微視的な量を巨視的な量に厳密に変換しえたわけではないが、Hagen-Poiseuilleの解が成立する層流域においてDarcy則を定性的に説明していると考えられる。ただDarcy則には適用限界があり、porous mediaを構成する粒子の直径 d 、巨視的な流速 V 、および流体の動粘性係数 ν とから定義されるReynolds数($Re = \frac{dV}{\nu}$)が1~10になるとDarcy則が成立しなくなるといわれている。この適用限界はあくまで実験的に示されたものであるが、毛細管モデルにおいて流れが層流状態の下でDarcy則が誘導されていること、したがって流れが層流状態でなくなるとHagen-Poiseuilleの解が得られず(1.2.2)式が誘導できないことから理論的に推測できる。

以上に述べたように、Darcy則はporous media内の流れが層流領域において成立し、遷移領域から乱流領域になると成立しなくなるが、この領域ではForchheimer形³⁾あるいは指数形⁴⁾の抵抗則が成立するといわれている。

Forchheimer形の抵抗則は、1901年にForchheimerにより発見されたもので次式に示すように全抵抗は流速の一次と二次の項の和であらわされる非線形抵抗則である。

$$-\frac{\Delta h}{\Delta x} = aV + bV^2 \quad \dots\dots\dots (1.2.3)$$

ここで $\frac{\Delta h}{\Delta x}$: 動水勾配 V : 巨視的な流速 ($L T^{-1}$)

a : 定数 ($L^{-1} T$) b : 定数 ($L^{-2} T^2$)

この抵抗則についての理論的誘導は最初⁵⁾沢田により、Kozeny-CarmanによるDarcy則誘導の場合と同様に、モデルを用いて行なわれた。沢田は二次元領域の平行流中に円柱を置いた系を考え、遷移領域の流れの解にOseenの解を適用し、その円柱の抵抗係数が流速の一次と二次の項であらわされることを考慮してForchheimer形抵抗則の V^2 の項が流体の慣性に起因することを示した。なお同じ結果がErgun⁶⁾によっても報告されている。

Kozeny-Carmanおよび沢田理論にみられるように、モデルを用いた理論的展開式には直接

測定不可能な変換係数が導入されているが、これはきわめて複雑な空間構造をもつ porous media を単純モデルに変換する場合にはやむを得ないことであり、このようなモデルを用いることの限界でもある。

モデルを用いた理論的取り扱いの他に、porous media 内の流体を Navier-Stokes の方程式で表わし、同式を直接積分することにより抵抗則を導こうとする研究もある。^{7), 8), 9)} これらは Navier-Stokes の方程式を直接積分することが porous media の空間構造および同式の複雑さのためきわめて困難であることから、ある程度積分を進めた後、変換係数を導入し抵抗則を導びいている。このため、この手法による理論的な説明は抵抗則の定性的な記述に終わったものがほとんどであり、今後の研究に待たねばならぬ問題が多い。

porous media 内の流れが完全乱流状態になると次式のような指数形抵抗則が成立するといわれている。しかしその理論的根拠は明らかでない。

$$-\frac{\Delta h}{\Delta x} = a V^n \quad \dots\dots\dots (1.2.4)$$

ここで n : 定数 a : 定数

抵抗則に関する実験的研究は古くから行なわれており、Darcy 則および Forchheimer 形抵抗則¹⁰⁾に関して多くの実験式が提示され、両式の成立は十分確認されている。また、Forchheimer 形抵抗則の一次と二次の項の係数 a , b 相互の関係を明らかにすることを試みた研究^{11), 12)}もあるが、なお十分ではなく、特に均一でない粒子の集合体よりなる porous media ではそれぞれに決定されねばならぬようである。

以上、浸透流解析の基礎となる抵抗則の問題を概括的に述べてきたが、これまでの研究推移よりして、Forchheimer 形抵抗則が理論的にも実験的にも Darcy 則に匹敵するほどよく吟味され、十分その有意性が認められていると考えられるので、本論文では Darcy 則に対し Forchheimer 則と呼称し、non-Darcy 流に対する抵抗則として採用することにする。

参 考 文 献

- 1) Darcy, H. : Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris, 1856.
- 2) たとえば Raymond N. Y. and B. P. Warkentin: Introduction to Soil Behavior, Macmillan, PP. 355-357, 1966.

- 3) Forchheimer, P. : Wasserbewegung durch Boden, Z. Ver. Deuts. Ing. №50, 1781-1788, 1901.
- 4) たとえば Scheidegger, A. E. : The Physics of Flow through Porous Media, Univ. of Toronto Press, P.127, 1957.
- 5) 沢田敏男： 浸透流の流動に関する研究(1), 農業土木学会誌, vol. 17, P. 58, 昭24, (1949).
- 6) Ergung S. : Fluid Flow through packed columns, Chem. Eng. Prog., vol. 48, PP.89-94, 1952.
Scheidegger, A. E. : 前出文献 4) PP.137-138.
- 7) Irmay, S: On the theoretical derivations of Darcy and Forchheimer Formulas, Trans. A. G. U., vol. 39, PP.702-707, 1958.
- 8) Sunada, D. K. : Laminar and Turbulent Flow of Water Through Homogeneous Porous Media, Disseratation, 1965.
- 9) 岡本雅美： 非圧縮性ニュートン流体の非ダルシー流, 第13回水理講演会講演集, PP.57-59, 1969.
- 10) 前出 8) の文献 P. 27.
- 11) Ward, J. C. : Turbulent Flow in Porous Media, Proc. of A. S. C. E., vol. 90, HY5, PP.1-12, 1964.
- 12) Kovac, G. : Relationship between Velocity of Seepage and Hydraulic Gradient in the Zone of High Velocity, Proc. 13th Congress of I. A. H. R., vol. 4, PP.25-38, 1969.

第3章 Forchheimer 則を適用した confined seepage

理論

第2章において述べたように、Darcy 則の適用限界を越えた領域における抵抗則として Forchheimer 則の成立が理論的・実験的に十分認められるので、本章では抵抗則に Forchheimer 則を適用して基礎方程式を誘導し、その解析手法を示す。また、採用した数値解析法について、計算精度、収束速度などに検討を加え解析理論の確立を図る。

第1節 基礎方程式および境界条件

Forchheimer 則を一般的にベクトル表示すると (1.3.1) 式で表わされる。

$$-\text{grad } h = (a + b |\mathbf{V}|) \mathbf{V} \quad \dots\dots\dots (1.3.1)$$

ここで h : 水頭 (L) \mathbf{V} : 流速 (L T⁻¹)
 a : 定数 (L⁻¹ T) b : 定数 (L⁻² T²)

スカラー場の任意の点で、水頭が一定の面にたてた法線の単位ベクトルを \mathbf{S} とすれば

$$-\text{grad } h = -\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} \quad \dots\dots\dots (1.3.2)$$

である。また i, j をそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルとすると (1.3.3), (1.3.4) 式が成立する。

$$-\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} = -\frac{\partial h}{\partial x} i - \frac{\partial h}{\partial y} j \quad \dots\dots\dots (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} &= (a + b |\mathbf{V}|) \mathbf{V} \\ &= (a + b |\mathbf{V}|) (u i + v j) \quad \dots\dots\dots (1.3.4) \end{aligned}$$

ここで u, v はそれぞれ x, y 方向の流速である。

(1.3.3), (1.3.4) 式より (1.3.5) 式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} &= (a + b |\mathbf{V}|) u & \dots\dots\dots (a) \\ -\frac{\partial h}{\partial y} &= (a + b |\mathbf{V}|) v & \dots\dots\dots (b) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (1.3.5)$$

$$\text{ここで } |\mathbf{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

(1.3.5) 式が二次元場でスカラー表示された Forchheimer 則である。

なお連続の方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.6)$$

1.1. 基礎式の誘導

(1.3.5) 式を, u , v , h についてそのまま解析することは, かなり困難であるので, まず流れの函数 ψ を導入し, それについて解析することにする。

まず, 流れの函数 ψ に関する基礎方程式を誘導する。

(1.3.5) 式において

$$F(\mathbf{V}) = a + b |\mathbf{V}|$$

とおき, (a) 式を y で, (b) 式を x でそれぞれ微分し, 辺々をおのおの減ずると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial y} [F u] - \frac{\partial}{\partial x} [F v] = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.7)$$

u , v を (1.3.8) 式で定義される流れの函数 ψ で表わすと (1.3.7) 式は (1.3.9) 式に変形される。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1.3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[F \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[F \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.9)$$

(1.3.9) 式を整理すると (1.3.10) 式を得る。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{-b}{\left\{ a + b \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right\} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} \dots\dots\dots (1.3.10)$$

次に(1.3.5)式より水頭 h に関する基礎方程式を誘導する。

(1.3.5)式における(a)式を x で、(b)式を y でそれぞれ微分し、辺々をおのおの加えると(1.3.11)式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (F u) + \frac{\partial}{\partial y} (F v) \right\} \\ &= - \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} u + F \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial F}{\partial y} \right\} \quad \dots\dots\dots (1.3.11) \end{aligned}$$

(1.3.11)式に連続の方程式(1.3.6)式を代入すると(1.3.12)式を得る。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = - \left(u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (1.3.12)$$

(1.3.12)式に流れの函数を代入して整理すると最終的に h に関する基礎方程式として(1.3.13)式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (1.3.13) \end{aligned}$$

(1.3.10)式および(1.3.13)式において、 $b=0$ すなわちDarcy則が成立すると考えられる場合には、それぞれ(1.3.14)式および(1.3.15)式となり、流れの函数 ψ および水頭 h に関してラプラス方程式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.14)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.15)$$

以上で、Forchheimer 則を適用した場合の流れの函数 ψ および水頭 h に関する基礎方程式が誘導できた。ただ confined seepage 問題では一般に解析条件として上下水頭値が与えられるが、potential flow とする理論では (1.3.15) 式から直接水頭についての解が得られるのに対し、本理論では、水頭に関する基礎方程式すなわち (1.3.13) 式に流れの函数が含まれているため、直接に水頭に関する解を求めることができない。したがって本理論により図 1.3.1 のような系を解析するためには次の手順によらなければならない。

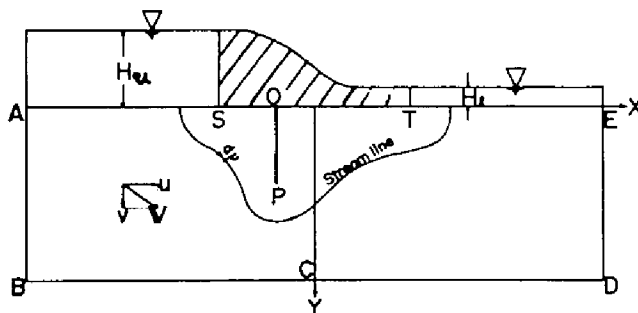


図 1.3.1 解析領域概略図

まず、その系の単位幅を流下する浸透流量を条件として、(1.3.10) 式の基礎方程式を用いて、その領域内の流れの函数 ψ を求める。次に流れの函数値を用いて一つの流線に沿う流速 u, v を計算し、(1.3.1)式を適用することにより、

全損失水頭 ($H_0 = H_u - H_e$) を計算する。最後に、この全損失水頭 H_0 を境界条件とし、前に求められている流れの函数値を、水頭に関する基礎方程式である (1.3.13) 式に導入して領域内の水頭分布を求める。したがって、はじめに解析条件として上下水頭差すなわち全損失水頭 H_0 が与えられた場合には、上述の手順を繰り返すことにより水頭分布に関する解を試算により求めなければならない。

なお、全損失水頭 H_0 は (1.3.1) 式を一つの流線に沿って積分することによって次のように求められる。

$$H_0 = H_u - H_e = \int_{\nu} (a + b|\mathbf{V}|) \cdot \mathbf{V} \cdot d\nu \quad \dots\dots\dots (1.3.16)$$

ここで ν : 流線の長さ

いま、図 1.3.1 に示すような領域を対象とし、一つの流線である不透壁面 ABCDE を積分路に選ぶならば、不透壁面 AB, DE 上で $u = 0$, BD 上で $v = 0$ であるから (1.3.16) 式は次のように書きかえられ、先に計算された流れの函数値を用いて、 H_0 が計算できる。

$$\begin{aligned}
H_o = & \int_{AB} \left\{ \left(a + b \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{AB}^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{AB}^2} \right\} dy \\
& + \int_{BD} \left\{ \left(a + b \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{BD}^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{BD}^2} \right\} dx \\
& + \int_{DE} \left\{ \left(a + b \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{DE}^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{DE}^2} \right\} dy \quad \dots\dots\dots (1.3.17)
\end{aligned}$$

1.2. 境界条件

ここで、図 1.3.1 のような解析領域を考えると、各境界に対する条件は次のとおりである。簡単のため境界は x, y に直角とする。

(1) 流入面 AS, [流出面 TE] :

この面では、水頭 h は一定であるから

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.18)$$

である。したがって $u = 0$ となり

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.19)$$

を得る。

(2) 不透壁面 [構造物の壁上 SO, OP, OT または不透壁面上 ABCDE] :

連続している不透壁は一つの流線と考えられるから不透壁上の流線の函数値は一定である。

$$\psi_{SOPOT} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.20)$$

$$\psi_{ABCDE} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (1.3.21)$$

また、不透壁を横切る流れはないから水頭 h についての境界条件は次のように表わされる。

$$\text{AB, DE, OP 上では} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.22)$$

$$\text{SO, OT, BCD 上では} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.3.23)$$

1.3. 基礎方程式の無次元表示

本理論の解について一般的な論議を進めるには解析結果を無次元量で表示しておく方が好都合であるので、ここでは基礎方程式(1.3.10)式(1.3.13)式および(1.3.17)式を無次元量を用いて表わす。

代表的な流れの函数値として、図1.3.1の境界ABCDEに境界条件として与えられる流れの函数値 ψ_0 (単位幅を流下する浸透流量 q に等しい)、代表的な水頭値として上下水頭差 H_0 、および代表長さとして透水層厚 L を選び、次の関係式のもとに(1.3.10)、(1.3.13)および(1.3.17)式を無次元化する。

$$\psi = \psi_0 \Psi$$

$$h = H_0 H$$

$$x = L X$$

$$y = L Y$$

ここで、 Ψ, H, X, Y はそれぞれ無次元量を表わしている。

流れの函数のための基礎方程式(1.3.10)式を無次元量で表わすと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = & \left\{ \frac{-1}{\left(\frac{a}{b} \frac{L}{\psi_0} \right) + \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2}} \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2}} \right\} \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right) \right\} \dots \\ & \dots\dots\dots (1.3.24) \end{aligned}$$

また水頭に関する基礎方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} = \frac{b \psi_0^2}{L H_0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2}} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)^2 \right\} \right]$$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right) \Bigg] \quad \dots\dots\dots (1.3.25)$$

ただし H_0 は (1.3.17) 式より (1.3.26) 式で表わされる。

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{b\psi_0^2}{L} \left[\int_{AB} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right\} dX \right. \\ & + \int_{BD} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right| \right\} dY \\ & \left. + \int_{DE} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right\} dX \right] \quad \dots\dots\dots (1.3.26) \end{aligned}$$

または、

$$\begin{aligned} \frac{H_0 L}{b\psi_0^2} = & \int_{AB} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right\} dX \\ & + \int_{BD} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right| \right\} dY \\ & + \int_{DE} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right) \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right| \right\} dX \quad \dots\dots\dots (1.3.26') \end{aligned}$$

これらの基礎式を用いると解析領域が相似である限り、無次元量 $\frac{aL}{b\psi_0}$ を等しく取り解析を進めるならば得られた流線分布・水頭分布は同一であることが明らかである。なお無次元量 $\frac{aL}{b\psi_0}$ は浸透流の状態を表わしており、この値が小さいほど流速の2乗に比例する抵抗の項の比重が大きくなりラプラス解との差が大きくなることを示している。

第2節 解 法

2.1. 差分近似式

図1.3.1に示すような系における confined seepage flow を解析することを考えると、基礎方程式は流れの函数に関する (1.3.10) 式、水頭に関する (1.3.13) 式および全損失水頭を求める式 (1.3.17) 式であるが (1.3.10) 式は非線形であり、境界の形状、条件から考えて解析的に解くのは困難であるので数値解法により解を得ることとする。なおできるだけ一般性をもたせるため、無次元量を用いて表わした基礎方程式 (1.3.24) (1.3.25) および (1.3.26) 式について数値計算を行なう。

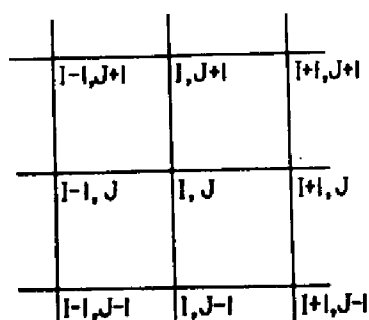


図 1.3.2 解析に用いる格子

まず、図 1.3.2 の場において、流れの函数に関する基礎方程式 (1.3.2.4) 式を差分形で表わすと次のようになる。

$$\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j-1} - 4\Psi_{i,j}}{n^2} = \rho_{i,j} \quad \dots (1.3.2.7)$$

ここで $\Psi_{i,j}$: 格子点 i, j の Ψ の値

n : 格子点間隔

$\rho_{i,j}$: 格子点 (i, j) において次式で表わされる値

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} = & \frac{-1}{\left\{ \left(\frac{a}{b} \frac{L}{\Psi_0} \right) + \left\{ \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right)^2 \right\}^{1/2} \right\}} \\ & \times \frac{1}{\left\{ \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \\ & \times \left[\left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right)^2 \left(\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}}{n^2} \right) \right. \\ & \left. + 2 \times \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right) \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{2n} \left(\frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}}{2n} - \frac{\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}}{2n} \right) \\ + \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right)^2 \times \left(\frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j}}{n^2} \right) \Bigg] \dots (1.3.28)$$

次に水頭に関する基礎方程式 (1.3.25) を差分方程式で表わすと次のようになる。

$$\frac{H_{i+1,j} + H_{i,j+1} + H_{i-1,j} + H_{i,j-1} - 4H_{i,j}}{n^2} = C_{i,j} \quad \dots (1.3.29)$$

ここで $C_{i,j}$ は各格子点 (i, j) で次式により決定される。

$$C_{i,j} = \frac{b\Psi_0^2}{LH_0} \frac{1}{\left\{ \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \\ \times \left[\frac{1}{2n} \left(\frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}}{2n} - \frac{\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}}{2n} \right) \right. \\ \times \left\{ \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right)^2 - \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right)^2 \right\} \\ + \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2n} \right) \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2n} \right) \\ \left. \times \left(\frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j}}{n^2} - \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}}{n^2} \right) \right] \quad \dots (1.3.30)$$

また (1.3.26) 式の積分は次式により数値的に行なうことができる。

$$\frac{H_0 L}{b\Psi_0^2} = \sum_{i=1, j=1}^{i=N, j=N} \left\{ \left(\frac{aL}{b\Psi_0} + \left| \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i+1,j}}{n} \right| \right) \left(\left| \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i+1,j}}{n} \right| \right) \right\} \cdot n$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1, j=N}^{i=M, j=N} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{n} \right| \right) \left(\left| \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{n} \right| \right) \right\} \cdot n \\
& + \sum_{i=M, j=1}^{i=M, j=N} \left\{ \left(\frac{aL}{b\psi_0} + \left| \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{n} \right| \right) \left(\left| \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{n} \right| \right) \right\} \cdot n \\
& \dots (1.3.31)
\end{aligned}$$

2.2. 数値解法

流れの函数に関する基礎方程式 (1.3.24) の差分近似式は (1.3.27) 式であり、水頭に関する基礎方程式 (1.3.25) のそれは (1.3.29) 式である。(1.3.29) 式の中には、流れの函数が含まれているため、potential flow に対する解析の場合とは異なり、水頭分布は (1.3.29) 式より直接得ることができない。そこでまず (1.3.27) 式を与えられた境界条件のもとに解析し、領域内の流れの函数の値を得た後、その流れの函数の値を (1.3.29) 式に代入し、水頭の値を求める。ただ、この間 (1.3.31) 式により全損失水頭の値を計算し、これを条件に用いなければならない。

ここで (1.3.27) 式は非線形方程式であるので次のような逐次代入法¹⁾により数値解を得ることにする。すなわち、すべての格子点で第 m 次近似 $\psi_{i,j}^m$ を既知、および $k, l = 1, 2, 3 \dots$ として $(i, j-k), (i-l, j)$ などの点の第 $m+1$ 次近似を既知とすると、(1.3.28) 式より (i, j) の $\rho_{i,j}^m$ が求められ、第 $m+1$ 次近似 $\psi_{i,j}^{m+1}$ を計算する基本型は (1.3.32) 式となる。

$$\psi_{i,j}^{m+1} = \psi_{i,j}^m + RA \quad \dots\dots\dots (1.3.32')$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで } RA = w \times & \left[\frac{(\psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^{m+1} + \psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^{m+1} - \rho_{i,j}^m n^2)}{4.0} - \psi_{i,j}^m \right] \\
& \dots\dots\dots (1.3.33)
\end{aligned}$$

$$\text{および } n^2 \cdot \rho_{i,j}^m = \frac{-1}{\frac{2n \cdot aL}{b\psi_0} + \left\{ (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})^2 + (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\left\{ (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})^2 + (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})^2 \right\}^{1/2}} \\
& \times \left\{ (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})^2 (\psi_{i+1,j}^m + \psi_{i-1,j}^{m+1} - 2\psi_{i,j}^m) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})(\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})}{2} \right. \\
& \quad \times (\psi_{i+1,j+1}^m - \psi_{i+1,j-1}^{m+1} - \psi_{i-1,j+1}^m + \psi_{i-1,j-1}^{m+1}) \\
& \quad \left. + (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})^2 (\psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^{m+1} - 2\psi_{i,j}^m) \right\} \\
& \dots (1.3.3.4)
\end{aligned}$$

(1.3.3.3) 式中の w は加速係数である。なお境界条件の導入はこれらの関係式に (1.3.1.9) 式の無次元差分式すなわち (1.3.3.5) 式を代入して容易に達成しうる。

$$\psi_{i,j-1} = \psi_{i,j+1} \quad \dots\dots (1.3.3.5)$$

この計算において、 ψ の出発値 $\psi_{i,j}^0$ としては真の解になるべく近いものを用いることが望ましいがここでは $\rho_{i,j} = 0$ の場合すなわちラプラス方程式の解を用いる。なお、この繰り返し計算における収束の判定としては、あらかじめ小さな値 ϵ を与えておき (1.3.3.2) 式における $\psi_{i,j}^m$ の修正量 RA のその系の内点での絶対値の総和 $ER = \sum |RA|$ が ϵ より小さくなったとき収束したものとみなす。この計算において境界条件として与えられる流れの函数値 ψ_0 、係数 a 、 b 、交点間隔 l などの値によっては (1.3.3.2) 式が収束しない場合も予想されるが、この場合には加速係数に 1.0 より小さい値を用いることにより収束させることができる。

(1.3.2.9) 式については右辺があらかじめ計算されるので S. O. R. 法²⁾により容易に数値解を得ることができる。この場合 S. O. R. 法の計算に用いる基本形は次のとおりである。

$$H_{i,j}^{m+1} = H_{i,j}^m + RA^m \quad \dots\dots\dots (1.3.3.6)$$

ここで

$$RA = \omega \times \left[\frac{H_{i,j+1}^m + H_{i,j-1}^{m+1} + H_{i+1,j}^m + H_{i-1,j}^{m+1} - C_{i,j} \times n^2}{4.0} - H_{i,j}^m \right]$$

および

..... (1.3.37)

$$C_{i,j} \times n^2 = \frac{b \psi_0^2}{2n \cdot L \cdot H_0} \frac{1}{\left\{ (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})^2 + (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\times \left[\frac{1}{4} (\psi_{i+1,j+1}^m - \psi_{i+1,j-1}^{m+1} - \psi_{i-1,j+1}^m + \psi_{i-1,j-1}^{m+1}) \right.$$

$$\times \left\{ (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1})^2 - (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})^2 \right\}$$

$$+ (\psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1}) (\psi_{i,j+1}^m - \psi_{i,j-1}^{m+1})$$

$$\left. \times (\psi_{i,j+1}^m + \psi_{i,j-1}^{m+1} - \psi_{i+1,j}^m - \psi_{i-1,j}^{m+1}) \right]$$

(1.3.37) 式中 ω は加速係数である。なお境界条件の導入はこれらの関係式に (1.3.22) 式、(1.3.23) 式の無次元差分式すなわち (1.3.39)、(1.3.40) 式を代入することにより容易に達成される。

$$(1.3.22) \text{ 式より } H_{i-1,j} = H_{i+1,j} \text{ または } H_{i+1,j} = H_{i-1,j} \quad \cdots (1.3.39)$$

$$(1.3.23) \text{ 式より } H_{i,j-1} = H_{i,j+1} \quad \cdots (1.3.40)$$

なお、図 1.3.1 における不透壁面 AB, BD, DE のように境界が x または y 軸に平行な場合には、これらの境界上で $u=0$ または $v=0$ であるため、(1.3.13) 式または (1.3.25) 式の右辺は 0 である。したがって (1.3.38) 式の $C_{i,j}$ もこれらの面上では 0 である。

2.3. 計算手順

この数値計算には多量の繰り返し計算を必要とするので電子計算機を用いて計算を行なう。この場合の計算手順は次のとおりである。

まず (1.3.14) および (1.3.15) 式を用いて流れの函数と水頭について S. O. R. 法を適

用しラプラス解を求める。条件として単位断面を流下する流量 q が与えられた場合には全損失水頭 H_0 (Lap) は未知であるので、(1.3.17) 式の $b=0$ の場合に相当する (1.3.41) 式により H_0 (Lap) を計算する。

$$\frac{H_0 \text{ (Lap)}}{a \psi_0} = \int_{AB} \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\right)^2} dY + \int_{BD} \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\right)^2} dX + \int_{DE} \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\right)^2} dY \quad \cdots (1.3.41)$$

以上で $b=0$ の場合すなわち potential flow とした場合の数値解が得られた。

次に本理論における流れの函数値を (1.3.32) ~ (1.3.34) 式であらわされる基礎式、(1.3.35) 式であらわされる境界条件および第 0 近似値としてラプラス解を用いて、逐次代入法により計算する。

流れの函数に関する数値解が得られたならば、(1.3.31) 式により H_0 を求めた後、(1.3.38) 式で表わされる各点の $C_{i,j}$ を計算し、(1.3.36)、(1.3.37) 式を用いて水頭値を S. O. R. 法により計算する。

なおこの一連の数値計算において、収束の判定は次式を用いて行なう。

$$\epsilon > ER = \sum |RA| \quad \cdots \cdots (1.3.42)$$

ここで ϵ : 打ち切り誤差, RA : 各点での剰余

第 3 節 数値計算に関する考察

この種の数値計算では常に収束性、収束速度、得られた結果の精度などが問題となるが、これらはいまの場合、無次元量 $\frac{aL}{b\psi_0}$ 、解析領域の形状、格子点数、格子点間隔、加速係数などと複雑に関連するので一般的な論議はむずかしい。そこで、ここでは代表的に一つの解析領域を選定し各係数、条件などある程度限定して数値計算を行ない、その結果をとおして上述の問題について考察を加えることにする。

まず、解析領域として図 1.3.3 に示されるような系を選ぶ。また、無次元量 $aL/b\psi_0$ として 2.16 を採用する。すなわち図 1.3.3 に示される解析領域と相似な場において $aL/b\psi_0 = 2.16$ であるすべての系について以下の論議は適用しうる。具体的な例としては、係数 a 、 b にそれぞれ実験から得られた $a = 0.27 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{sec}$ 、 $b = 0.25 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{sec}^2$ を用い透水層厚 L に 40 cm、条件とし与えられる単位断面を流下する流量として $q = 20 \text{ ml/sec/cm}$ を採用した場合に相当する。

(26)

3.1 - 格子点間隔

この種の計算では格子点間隔 n が小さければ小さいほど得られる結果のよくなることが推測されるが、格子点間隔の縮小は急激に計算量の増加をもたらすので、おのずと限界がある。そこでまずこの点について若干の考察を行なう。

図 1.3.3 の透水層厚を 3.216, 1.0 等分した格子間隔、すなわち n/L に 0.03125, 0.0625, 0.10 を用いて全領域を分割すると、格子点数は境界上の点を含め、それぞれ 3201 点、833 点および 341 点となるが、実際の計算に必要な格子点数は、流れの函数を計算する場合にはそれぞれ 2991 点、721 点および 274 点、また水頭についての計算では sheet pile 上での両面を計算する必要もあってそれぞれ 3151 点、807 点、および 324 点となる。

この計算における一点の打ち切り誤差すなわちこの数値計算において収束したとみなす限界を $n/L = 0.0625$ と $n/L = 0.1$ の場合に 7×10^{-6} としたが、 $n/L = 0.0625$ の場合には格子点数が 3000 点もあり計算に長時間を要するので他の場合より要求精度を一桁下げ 5.0×10^{-5} とした。

これらの格子点間隔について、全損失水頭のラプラス解およびこの理論による解をそれぞれ (1.3.41) および (1.3.31) 式より求め、 $n/L = 0.0625$ の場合の計算結果との比、すなわち

$$\frac{\frac{H_0 L}{b \psi_0^2} \Big|_{\frac{n}{L}}}{\frac{H_0 L}{b \psi_0^2} \Big|_{\frac{n}{L} = 0.0625}} = \frac{H_0 \Big|_{\frac{n}{L}}}{H_0 \Big|_{\frac{n}{L} = 0.0625}}$$

で示すと図 1.3.5 のようになる。

なお $\frac{H_0 L}{b \psi_0^2} \Big|_{\frac{n}{L} = 0.0625} = 9.168$ であった。この結果は打ち切り誤差を一様にしない点

に問題が残るが、図 1.3.3 に示すような系については、格子間隔を 0.0625 L すなわち透水層厚を 16 分割する程度でかなりの精度の計算結果の得られることがわかる。

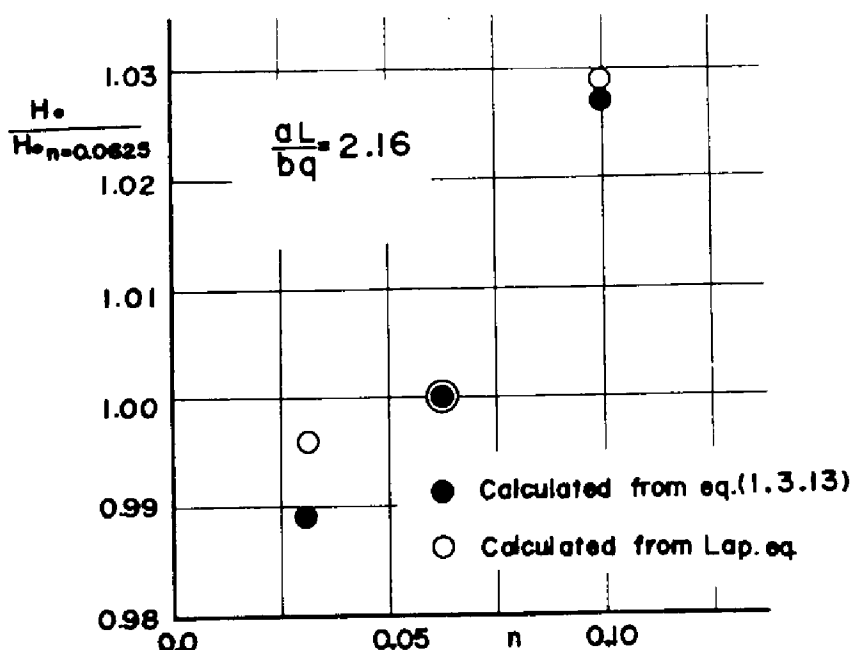


図 1.3.5 格子間隔と計算精度

3.2. 打ち切り誤差

この理論による解析では、水頭分布を求めるのに流れの函数の計算結果を用いるから、流れの函数に含まれる誤差も水頭分布にかなりの影響をもってくる。そこで、いま図 1.3.3 の系において格子点間隔 $h/L = 0.0625$ とし、許容誤差すなわち (1.3.3.3) 式における修正量 RA の絶対値の総和の許容値 ϵ として 0.0005, 0.0025, 0.005, 0.025, 0.05 を与えて全損失水頭の差異を検討した。これを $\epsilon = 0.005$ (格子点一点について 7×10^{-6}) を規準にとって比較すると図 1.3.6 のようである。図 1.3.6 より、この計算では $\epsilon < ER = 0.005$ 、一点については 7×10^{-6} であれば、この種の誤差は無視できることがわかる。なお、ラプラス解についてのこの種の誤差はほとんどの場合問題とならなかった。なおこの系の左右対称性については許容誤差の範囲内で十分な結果が得られた。

以上の結果、打ち切り誤差が計算結果におよぼす影響はさほど大きくなく、むしろ格子点間隔の取り方が計算精度に大きな影響をもつことがわかった。したがって、実際の場合では打ち切り誤差を多少大きくとっても格子点間隔を小さく取る方が望ましいといえる。

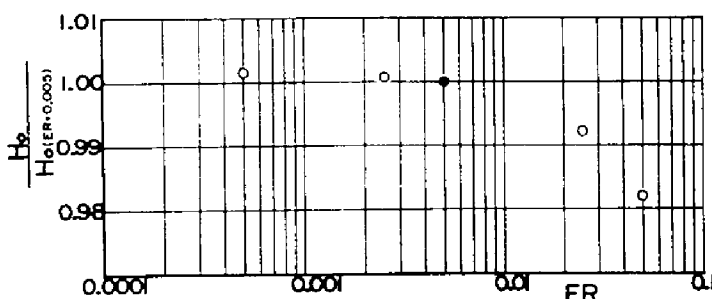


図 1. 3. 6 打ち切り誤差と計算精度

3. 3. 加速係数

一般に繰り返し計算では、いかにして収束速度を速めるかということが、電子計算機の使用時間の節約上大きな問題となる。また係数の取り方、計算条件、交点間隔等によっては収束しない場合も生ずる。こうした問題に特に重要な役割を果たすのが加速係数 w である。(1. 3. 3 2)～(1. 3. 3 4)式の計算では各ケースとも $w=1.0$ で収束したが、この計算に後述のラプラス方程式を解く場合の最適加速係数に近い値を用いると収束しなかった。

はじめに、本研究ではラプラス方程式の解を本理論解との対比に用い、かつ(1. 3. 3 2)～(1. 3. 3 4)式の計算のための出発値としたが、このためラプラス方程式の解をS. O. R. 法により求めることにした。ラプラス方程式の計算において、その出発値は解とほど遠い値であることが多いため、精度の高い解を得るためには(1. 3. 1 0)式を解く場合と同程度の繰り返し回数を必要とする。この繰り返し計算の回数を減少させるには、加速係数 w の選択がきわめて重要となるので以下若干の検討を加える。

図1. 3. 3に示す領域を格子間隔 $\pi/L=0.0625$ で分割し、計算を行なった場合の全格子点での修正量絶対値の総和 $\sum |RA|$ と繰り返し回数 N との関係を図1. 3. 7に示す。なお図1. 3. 7(a)は流れの函数、(b)は水頭の計算時に得られるものである。

いま最適加速係数を w_{opt} と書くと、一般に $N \sim \sum |RA|$ の関係は $w < w_{opt}$ ならば滑らかであるのに対し、 $w > w_{opt}$ となると波状を示すことが知られているが、こうした観点より図1. 3. 7をみると、ラプラス方程式の解を求めるための流れの函数の計算では $w_{opt} \div 1.8$ 、水頭の計算では $w_{opt} \div 1.9$ であることがわかる。なお流れの関数と水頭分布の計算では w_{opt} が異なるのは不透壁面上での計算の有無、すなわち領域の形状の差異によるものと考えられる。

第4章 矢板のまわりの浸透流に関する実験

第1節 実験装置と材料および実験概要

前述の理論の適応性を検討するため一つの実験を行なった。本章ではその概要と実験結果について論ずる。

実験装置の概要を図1.4.1に示すが、その主要部は実験水槽本体、空気分離塔、計量水槽、高水槽、低水槽、マノメータである。

実験中の水循環は次のとおりである。まず、低水槽からポンプにより高水槽に揚水された水は

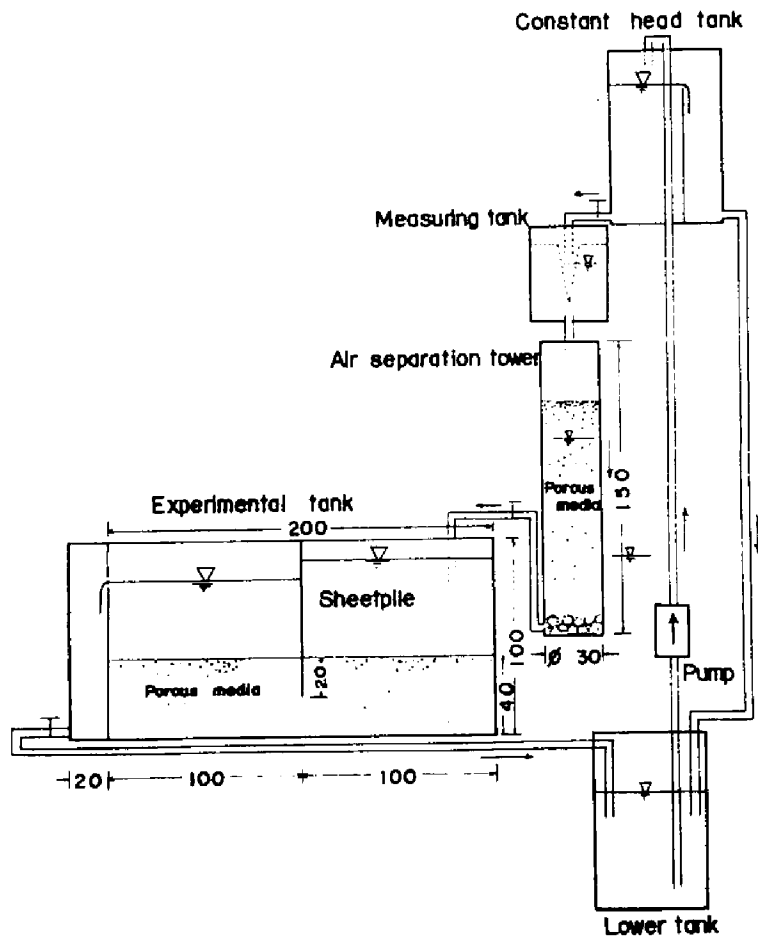


図 1.4.1 実験装置概略図

計量水槽で測定されつつ所定の流量に調節される。高水槽には余水吐と流量調整用のバルブが取り付けられており、ポンプによる揚水量が大きく変動しない限り、十分な精度で一定の流量の水が供給されるようになっている。また計量水槽による量水は十分な流量検定を行なった三角堰を通して行なわれる。次に、流量測定を終えた水は空気分離塔を通して実験槽上流端に供給され、porous media内を流下して、下流側水槽を経て低水槽にもどる。実験水槽は長さ200cm、深さ100cm、巾40cm、一側面に厚さ10mmの透明アクリル樹脂板をはめた鋼鉄製槽である。この水槽の他の鋼板面には最小5cm、最大20cm間隔に水頭測定用の長さ5cm（内側へ3cm突出）内径4.8mmの真鍮製パイプを配置しており、水位をビニールパイプを通してガラス製マノメータへととり出した。このガラスパイプは内径4mmであるが必ずしも整一ではないので、実験に先立ち槽に水を張り、メニスカス補正量を測定しておき、これを実験データの補正に使用した。

実験に使用したporous mediaは表1.4.1に示すような粒度分布をもった丸味のある砂、小礫で、これを十分水洗した後実験槽に填充した。

矢板材料としては、厚さ10mmのアクリル板を使用し、実験は矢板の透水槽中の深さが20cmの場合について行なった。なお矢板面の滑面効果を除去するため矢板両面に実験に使用した砂礫と同じ砂礫を接着しておいた。また透水層としての砂礫はできるだけ密につめたが、透水層内水頭分布に不揃いがみられたときは詰め変えをした。

実験に用いた水は水道水であるが、実験中水温は $18^{\circ}\sim 21^{\circ}\text{C}$ であった。水には溶解空気が含まれ、これが透水中分離して砂礫に付着するなど不都合を生じやすいが、本実験では、こうした難点を改善するため流量測定を終えた水を溶解空気分離塔を通させた後、上流側給水槽までは空気に接触させず給水する方法をとった。この空気分離塔は下端を閉鎖した長さ1.5m直径0.3mの塩化ビニールパイプを鉛直に立て、これに実験材料と同組成の砂を填充したもので、上端に入れた水を下端から5cmのところにとりつけた直径7.5cmの塩化ビニールパイプより取り出すようにしたものである。この空気分離塔を通水させることにより溶解空気が完全に除去し得るかどうかは不明であるとしても、実験で支障をきたす現象は現われなかった。

この実験で過マンガン酸カリを用いて流線分布の測定を試みたが、使用したporous mediaがかなり粗であり、かつかなり早い流速を対象とした実験であったため、色素の拡散が大きく、流線の追跡は不可能であったため中止せざるを得なかった。

表 1.4.1 実験材料の粒度分布

Particle size(mm)	~10	10~4.8	4.8~2.0	2.0~0.85	0.85~
%	0.3	26.6	67.3	5.7	0.1

第2節 透水試験

填充砂礫内の流れの抵抗特性を知るため、あらかじめ透水試験を行なった。この試験は通常の透水試験器ではあまり十分な試料を充填できないので、内径12.5cm、長さ110cmの硬質塩化ビニールパイプを用いた。この場合でも直径の大きさが問題になるが、充填長さをいろいろ変えての予備実験の結果中充填長が60cm以上であれば側壁効果が無視できることを確認した。したがって、砂礫充填長は60～100cmとした。

透水性の程度は試料の充填密度により多少異なる。試験結果は図1.4.2に示すとおりである。また、これらの結果より、よく充填されたものに対し

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.27U + 0.25U^2 \quad \dots\dots(a)$$

やや粗なものに対しては

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.25U + 0.15U^2 \quad \dots\dots(b)$$

$$-\frac{\Delta H}{L} = 0.23U + 0.12U^2 \quad \dots\dots(c)$$

を得た。ここでUは流速、 $-\Delta H/L$ は動水勾配である。なおこの結果は充填を行なった回ごとのそれであり一回の実験結果のばらつきを示すものではない。

図1.4.2にみられるように、いずれも流速は0.1cm/sec以上であることから、Reynolds数は5以上となり、Darcy則の適用範囲外であると認められた。こうした条件下で透水係数を考えるのは問題であるが一応Forchheimer則の第1項の係数の逆数を透水係数kとすると(a)～(c)式の場合もそれぞれ $k_{(a)} = 3.75 \text{ cm/sec}$ 、 $k_{(b)} = 4.0 \text{ cm/sec}$ 、 $k_{(c)} = 4.35 \text{ cm/sec}$ となる。

第3節 実験結果

実験は図1.4.1および図1.4.4に示す有限領域内の矢板のまわりの流れについて行なった。なおporous mediaの充填深さは40cm、矢板の深さは20cmとした。この実験ではporous mediaの間隙率は0.35であった。

図1.4.3に実験および計算結果との対比を全損失水頭 H_0 と単位断面流量 q の関係で示す。これより、実験による $q-H_0$ 関係は直線状ではなく、Darcy則の下で成立するラプラス方程式の解

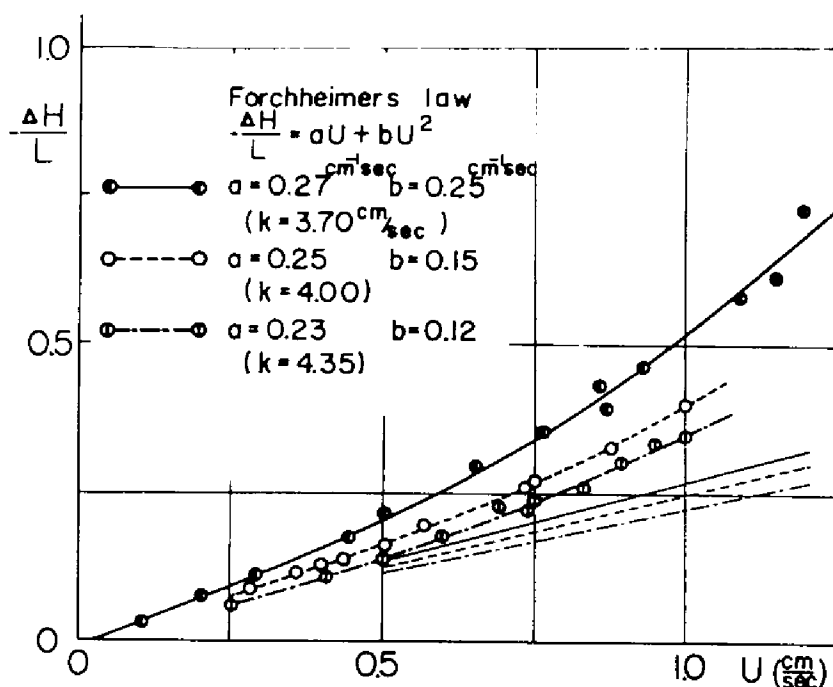


図 1.4.2 透水試験結果

からはかなりの隔りがみとめられる。またこの porous media についての透水試験の結果から充填密度の差によって係数の若干異なる Forchheimer 則を得ているが、これらの係数を用いた計算結果と対比すると $a = 0.25 \text{ cm}^{-1} \text{ sec}$, $b = 0.15 \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^2$ を適用した場合が最も実験結果を良く説明しているといえる。透水試験装置（直径 1.25 cm のパイプを使用）内への砂の充填を密にすることは容易であるが、大きい水槽内の砂を同程度にすることの困難性を考慮すると、この解析結果と実験結果との一致はかなり良好なものとみて良い。

図 1.4.4 に $q = 19.5 \text{ cm}^3/\text{s}/\text{cm}$ の条件下で得られた実験結果と $a = 0.25 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{sec}$, $b = 0.15 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{sec}^2$ を用い格子点間隔 2.0 cm で解析して得られた結果とを水頭分布について示す。全損失水頭については、実験では 13.67 cm, 理論からは 13.58 cm となりかなり良い一致をみることができる。また図 1.4.4 には $q = 19.5 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ の場合のラプラス方程式の解を併示してあるが、この水頭分布の状態のみに着目しても実験結果とかなり様相が異なることがみられる。これに対し、著者の理論結果は良く実験結果と合っているといえよう。

以上図 1.4.3 および図 1.4.4 の対比より、Darcy 則の上限を越える流れの領域では Forchheimer 則の適用が良い結果を与えると結論できる。

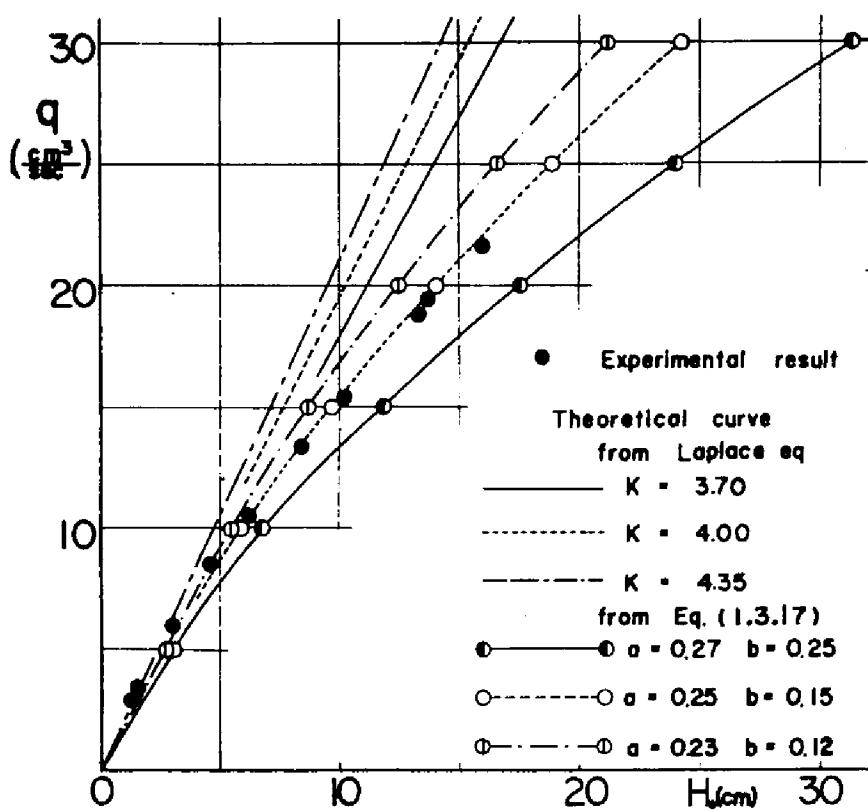


図 1.4.3 流量と全損失水頭に関する理論曲線と
 実験結果との比較

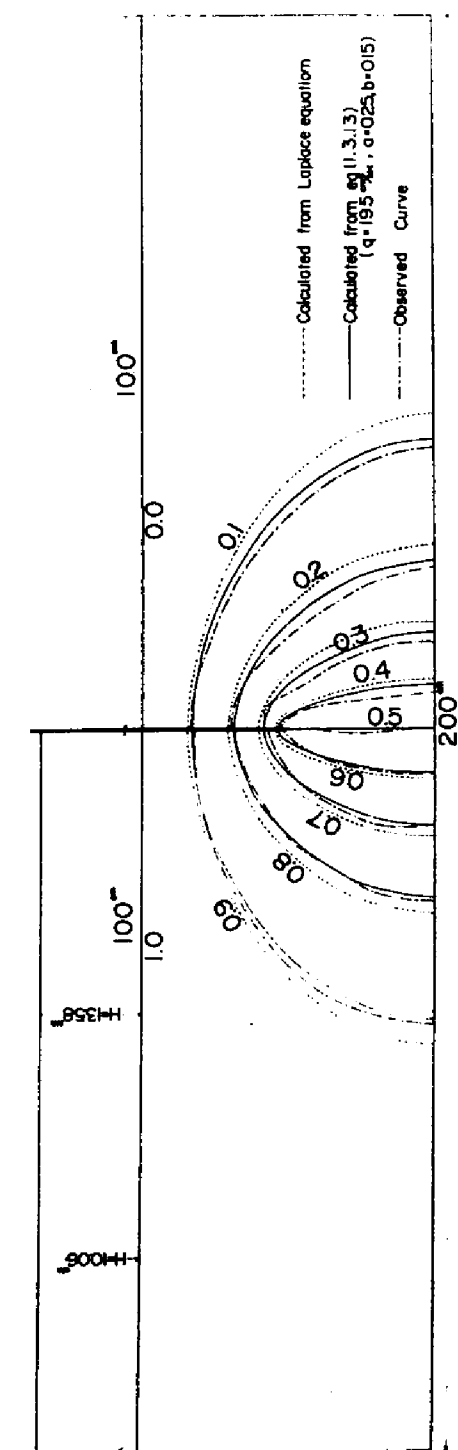


図 1.4.4 水頭分布に関する理論値と実験結果との比較

第5章 Forchheimer則を適用した confined seepage

理論の適用

第3章で示した Forchheimer 則を適用した confined seepage 理論の適応性が第4章で実験的に立証されたので、本章ではこの理論を実際に見られる系に適用し、ラプラス解との比較において基礎地盤中の浸透流特性を明らかにする。

この理論では基礎方程式の解析を数値計算によって行なわなければならない、したがって普遍的な議論をすることがかなり困難であるため、ここでは代表的な有限領域の系を選び、議論を進めることにする。

第1節 矢板のまわりの浸透流

代表系として図1.4.4に示す実験に用いたものと同様な系を採用する。この領域を一辺の長さ n/L が0.05の正方形格子を用いて分割する。すなわち y 軸方向の領域を20分割する。計算は一点の収束判定値にほぼ 1×10^{-6} を用い、浸透流の抵抗に関する条件すなわち aL/bq を変えて行なった。

1.1. 流線網

図1.5.1に aL/bq が3.42である場合の流線網を例示する。ここで q は(1.3.10)式の Ψ_0 に相当し、Sheet pileの単位巾当りの浸透流量を意味する。なおこの流線網は領域が相似であって、無次元量 aL/bq が3.42である限り、各係数や浸透流量 q が変化した場合においても不変である。

この図より本理論による結果をラプラス方程式の解と対比すると、流線分布は流速の大きいところで平均化され、等水頭線は流速の大きい部分に集まっていることがわかる。これは Forchheimer 則の流速の2乗に比例する抵抗項がかなりの比重をもつため、流れは抵抗の少ない方に進もうとし、水頭は流速の大きいところで多く失なわれるという事実をよく説明している。

1.2. 全損失水頭

本理論では領域が相似であり無次元量 aL/bq または $aL/b\Psi_0$ が等しい場合には流線網は同一であるが、この場合 $H_0 L/bq^2$ の値も不変であることは(1.3.26)式より明らかである。次に、 aL/bq を1.44から15.36の範囲で変化させた場合、これに対応する $H_0 L/bq^2$ の変化状況を図1.5.2に示す。この図から Forchheimer 則の係数 a , b , 長さ L と浸透流量

q を用いることにより、全損失水頭値 H_0 を計算することができる。なお、(1.3.24)式では無次元量 aL/bq が分母にあるため、この無次元量が小さければ小さいほどForchheimer則の V^2 の項の影響を大きく受けラプラス解との差が増大することが明らかであるが、ラプラス解と本理論解より得られる全損失水頭の比較については前章において図1.4.3に具体的な数値を示し考察を行なっているのでここでは省略する。

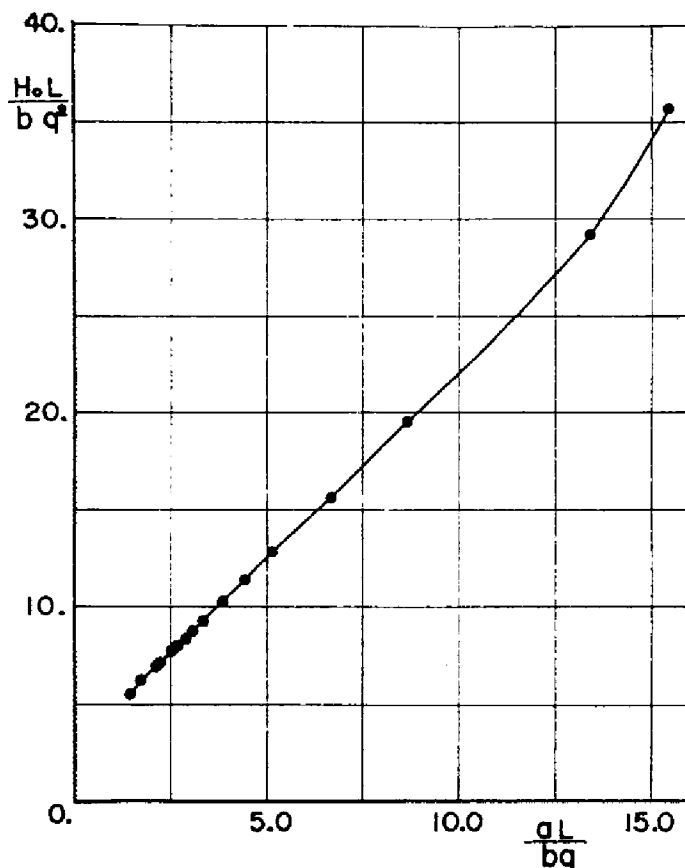


図 1.5.2 aL/bq と $H_0 L/bq^2$ の関係

1.3. 流速分布

ここでは、計算によって得られた流れの函数値と(1.3.8)式を用いて、流入面および矢板直下の断面の流速分布を求めた結果について考察を加える。

はじめ図1.5.3(a)に、ここで取り上げた系の位置・記号を示し、流入面ABと矢板直下CDにおける流速分布の概略を示す。

つきに図1.5.3(b), (c)に流入面AB, 矢板直下の断面CDにおける流速分布を aL/bq が1.44,

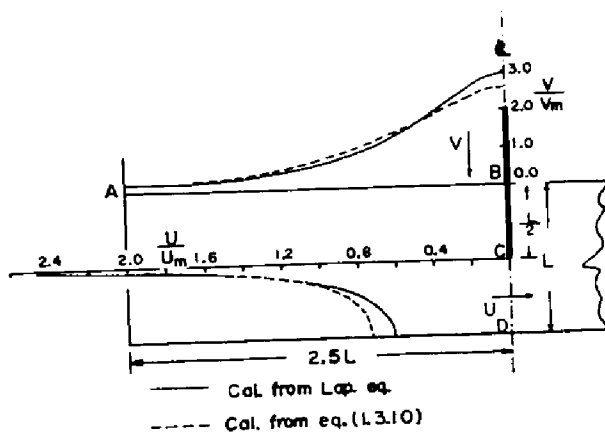


図 1.5.3(a) 流速分布概略図

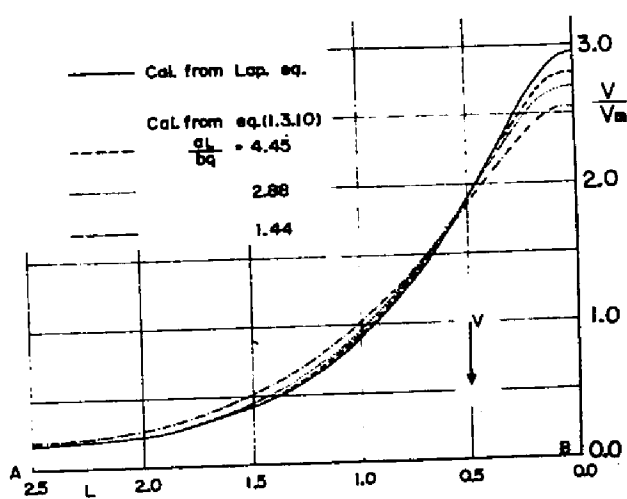


図 1.5.3(b) 流入面 A/B における流速分布

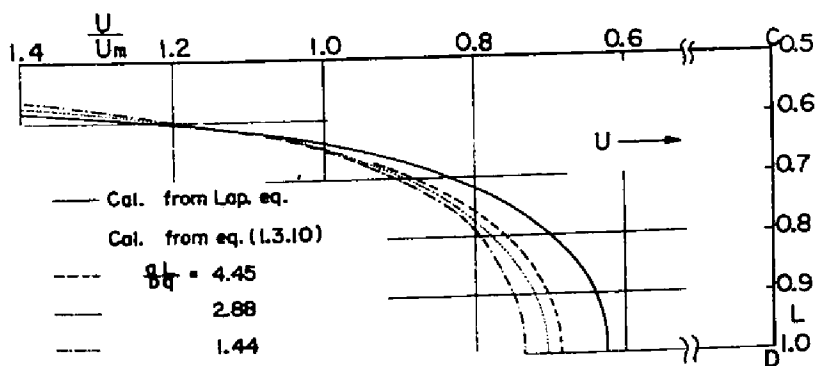


図 1.5.3(c) 矢板直下 CD における流速分布

2.88, 4.45の場合についてラプラス解と対比して示す。なおこの図において、流速は浸透流は q を通水巾 AB または CD で除して得られる平均的な流速 V_m または U_m を用いて無次元化した形で示してある。

これらの図より次の点が明らかになる。ラプラス解と比較して aL/bq が小さいほど矢板付近では流速低下を生じているが、それに反して矢板より離れた地点では流速の増大が認められ、図1.5.1の流線網より予想されることであるが、流速分布はForchheimer則の V^2 に比例する抵抗項の影響を強く受ける系ほど平均化されている。

1.4. 矢板に作用する浸透水圧

図1.5.4に矢板に作用する浸透水圧を aL/bq が1.44, 2.88, 4.45の場合についてラプラス方程式の解と共に図示する。この図より、本理論によって得られる矢板面に働く浸透水圧はラプラス解のものより若干大きく、かつその程度は aL/bq の値が小さいほど顕著である。

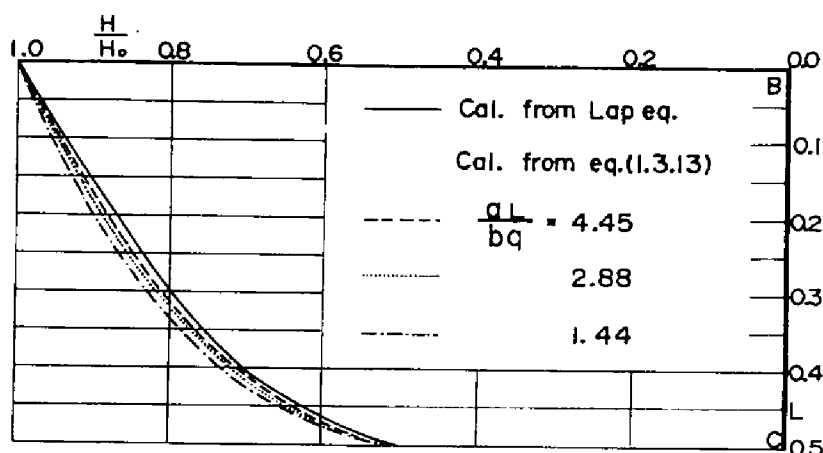


図 1.5.4 矢板に作用する浸透水圧分布

以上によって、この理論を適用した場合の矢板周辺部の浸透流の特性がかなり明らかになったが、現地で見られるscaleの系についてポテンシャル理論から得られる結果と比較し、この理論解の特徴を明らかにしておく。

ここで具体的な系として図1.5.1に示すものと相似な領域を選び、透水層厚20m、矢板深さを10mとする。Forchheimer則の係数 a 、 b については現場で見られる砂礫についての実測結果があまり得られていないので見当がつけにくいですが、ここではとりあえず $a = 0.25 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{sec}$ 、 $b = 0.15 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{sec}^2$ 、透水係数 $K = 4.0 \text{ cm/sec}$ とする。

今、上下流水位差 H_0 として8.34 mが条件として与えられた場合を考えると、図1.5.2の關係を用いて q は $1157.4 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ であり、 aL/bq は2.88を得る。なおラプラス解の場合は図1.4.3に示す關係より q は $1619.4 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ となる。このように、上下流水位差が同じ（この場合 $H_0=8.34\text{m}$ ）であっても、著者の理論を適用した場合の浸透流量は potential flow とした場合より約30%減少することがわかる。

流入面において矢板より50 cm離れた地点の流速を図1.5.3(b)を参照して吟味すると、本理論では $0.63 \text{ cm}/\text{sec}$ 、一方 potential flow とした場合には $0.96 \text{ cm}/\text{sec}$ となり、動水勾配はそれぞれ0.21、0.24となる。ここでは流速は約35%低下しているのに動水勾配はそれほど低下していないことになる。

次に、矢板直下の矢板先端より50 cmはなれた地点の流速を図1.5.3(c)を用いて計算すると、本理論では $2.34 \text{ cm}/\text{sec}$ 、potential flow とした場合は、 $4.01 \text{ cm}/\text{sec}$ であった。動水勾配についてはそれぞれ1.407、1.001、の値を得た。すなわち流速の大きい矢板先端付近では potential flow の場合にくらべこの理論より得られた流速は約1/2であるが、動水勾配は約40%ほど増加している。

これらの現象は V^2 の抵抗による水頭損失の大きいことを示すものであって、potential flow とした場合に比較して、流速は減少するが動水勾配は増大するという結果はこの理論の一つの特徴でもある。

第2節 一列の sheet pile を有するダム の基礎地盤中の浸透流

本節では有限領域内の一列の sheet pile を有するダム の基礎地盤中の浸透流について解析検討を加える。

ここでは、代表的な系として図1.5.5に示す解析領域をとりあげ、ダム の長さ S 、ダム の下流端から sheet pile までの長さ T 、sheet pile の深さを d 、透水層の厚さを D として表わす。またこの系における代表長 L をこれまでどおり透水層の厚さにとる。解析を行なった sheet pile の配列形式は、sheet pile の深さ d/D として0.75、0.50、0.25の3種、sheet pile の位置 T/S として0.5、0.6、0.7、0.8、0.9、1.0の6種を選び、それぞれの組み合わせで18種類を考えた。なお、中央より下流側の sheet pile の配列については、流れが sheet pile が上流側にある場合と対称であり、この解析結果を変換することによりその解が得られるので省略する。

解析条件として、 $aL/bq=3.333$ 、格子間隔 $n/L=0.05$ 、一点に許される誤差は 1×10^{-4} を採用して計算を行なった。以下この結果を用いて若干の考察を加える。

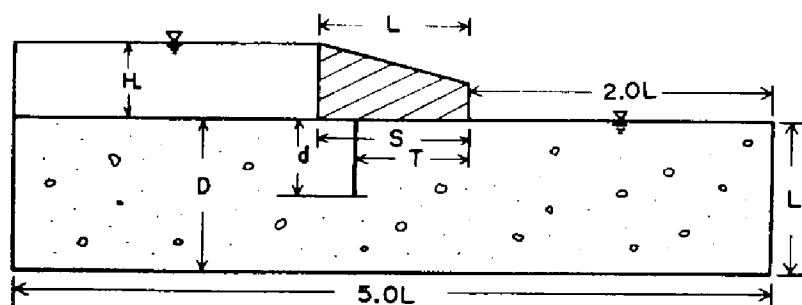


図 1.5.5 解析領域

2.1. 流線網

Sheet pile の配列形式が $T/S = 0.8$, $d/D = 0.75$ の場合の流線網を図 1.5.6 に例示する。同図にラプラス解を併示する。Sheet pile の他の配列形式についての計算結果と共通していえることであるが、この図より流線分布はラプラス方程式より得られるものより流速の大きい所で平均化され、等水頭線はラプラス解に比べ流速の大きいところに集まることが認められる。これは前述の矢板のまわりの流れの場合と類似の現象である。

2.2. 全損失水頭

前述の18種の sheet pile の配列形式について計算を行なった結果より無次元量

$H_0 L / bq^2$ と sheet pile の深さ・位置との関係を図 1.5.7 に示す。

図 1.5.7 からは本理論解とラプラス解との対比ができないので一般性を欠くが、次の具体例により検討する。いま図 1.5.5 に示す系において $L = 40 \text{ cm}$, 単位巾当りの流下量 $q = 20 \text{ cm}^3/\text{sec}$ / cm とし, Forchheimer 則の係数 $a = 0.25 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{sec}$, $b = 0.15 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{sec}^2$ とする。またこれに対応する Darcy 則の透水係数として $k = 4.0 \text{ cm}/\text{sec}$ を採用した場合の全損失水頭 H と d/D , T/S との関係を図 1.5.8 に示す。この図より, sheet pile が深いほどすなわち下部の不透過面と sheet pile 先端との間隔が小さいほどラプラス解との差は大きいことが認められる。これは部分的にかなり大きな流速が発生し, ラプラス解では考慮できない V^2 の抵抗の項の影響によるものである。すなわち, 本理論解に従うならばラプラス解と同じ浸透流量を生じさせるために大きな水頭を必要とし, 漏水量についてはその量を小さ目に算出する。

また, 図 1.5.7 および図 1.5.8 より, sheet pile の配列形式と止水効果との関係をみる

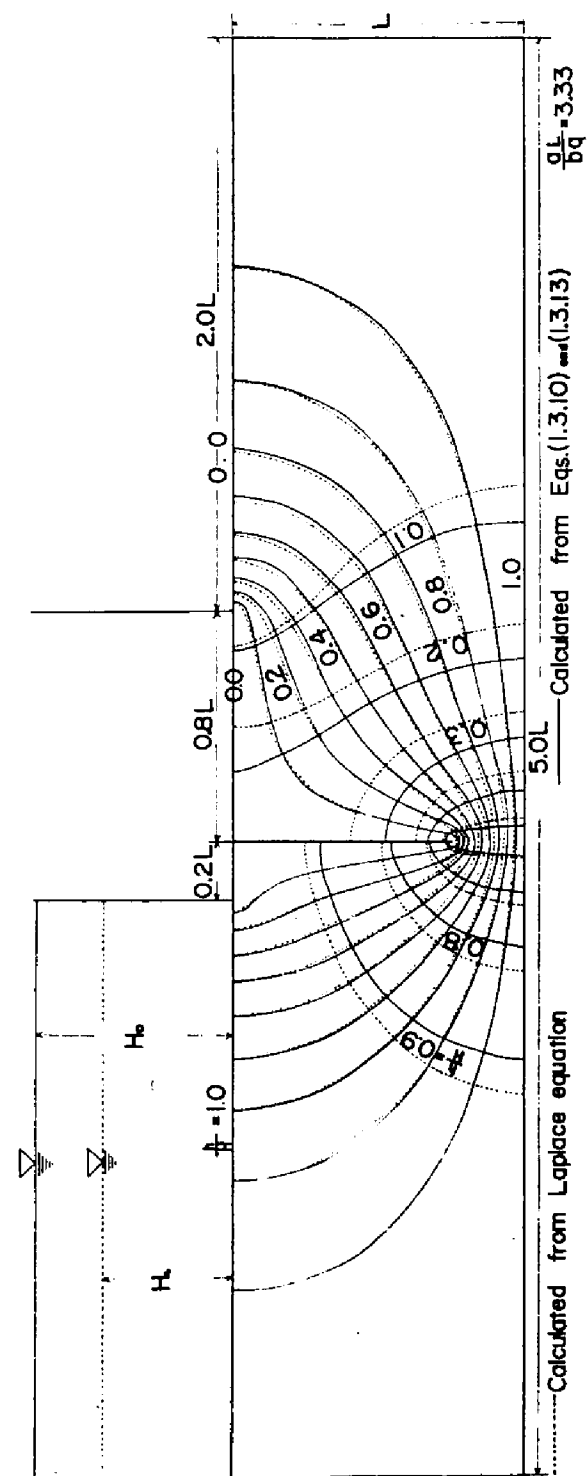


图 1.5.6 流線網

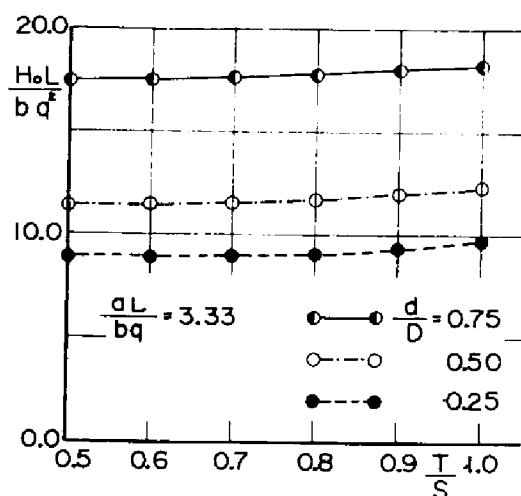


図 1.5.7 全損失水頭と sheet pile の配列との関係

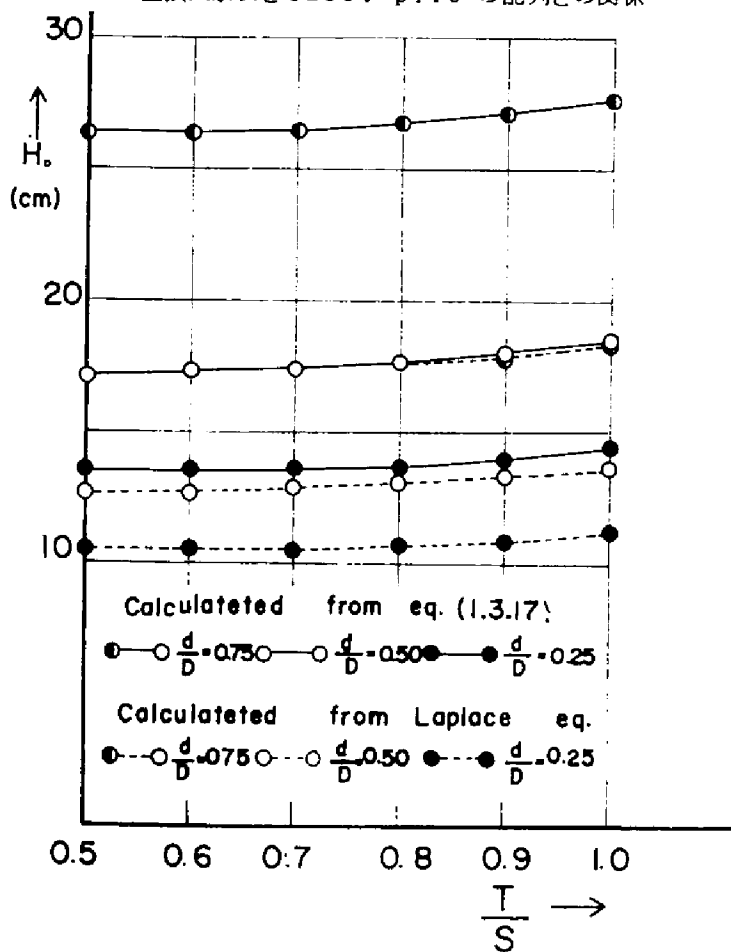


図 1.5.8 全損失水頭についての本理論解とラプラス解との比較

と、定性的傾向にはラプラス解と顕著な差はないが、sheet pile が深いほど、sheet pile が上流側先端部に近いほどその影響が大きいことが明らかである。

2.5. 揚圧力分布

ダム底部に作用する揚圧力と sheet pile の位置との関係を図 1.5.9(a)~(c)に示す。なお、これらの図にはラプラス解より得られる水頭分布を併示してある。これらの図より図 1.5.5 に示す系と相似な領域において無次元量 $\alpha L/bq$ が 3.333 の場合の揚圧力分布が容易に算出する。図 1.5.10 には図 1.5.9(a)~(c)中の垂直線分長で表わされる sheet pile による水頭損失量 H_d と sheet pile の深さ d/D 、位置 T/S との関係を本理論解とラプラス解とを対比して示す。

図 1.5.9(a)~(c)を用いて両理論解の対比を行なうと、底面に作用する揚圧力分布についてはそれほど差は認められないが、図 1.5.10 に示されているように sheet pile による水頭損失量にはかなりの差が認められる。また、これらの図によると、sheet pile の効果は sheet pile が深く、その位置が上流端に近いほど大きく現われる。これはラプラス解の場合と共通した傾向であるが、その効果の現われ方は若干異なり、sheet pile の位置の影響は sheet pile の深さが浅いほど大きく現われ、ラプラス解との差は sheet pile の深さが深いほど大きく現われる。

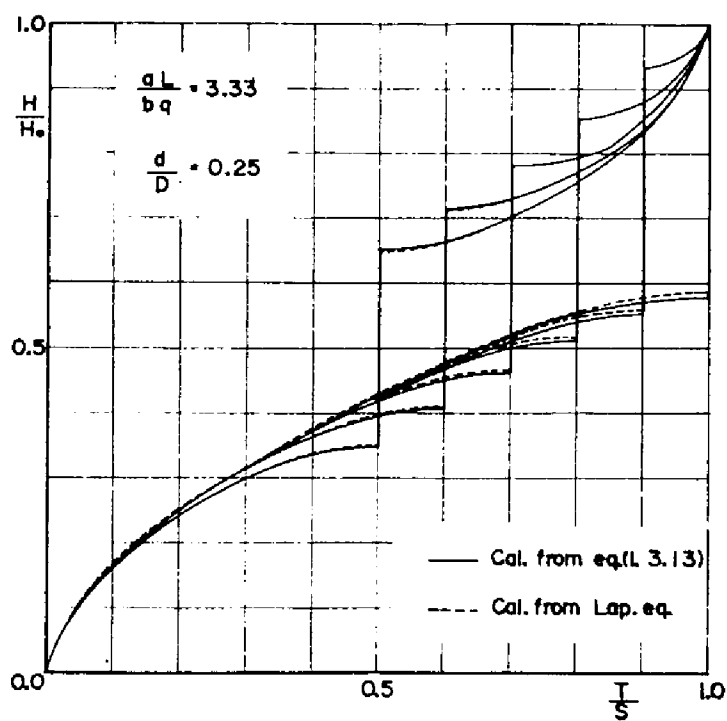
2.4. 流入面における流速分布

流入面における流速分布を図 1.5.11(a)~(c)に示す。なお同図にラプラス解より得られる流速分布を併示する。ここで図中の V_m は前節の定義のとおり q/\sqrt{AS} である。

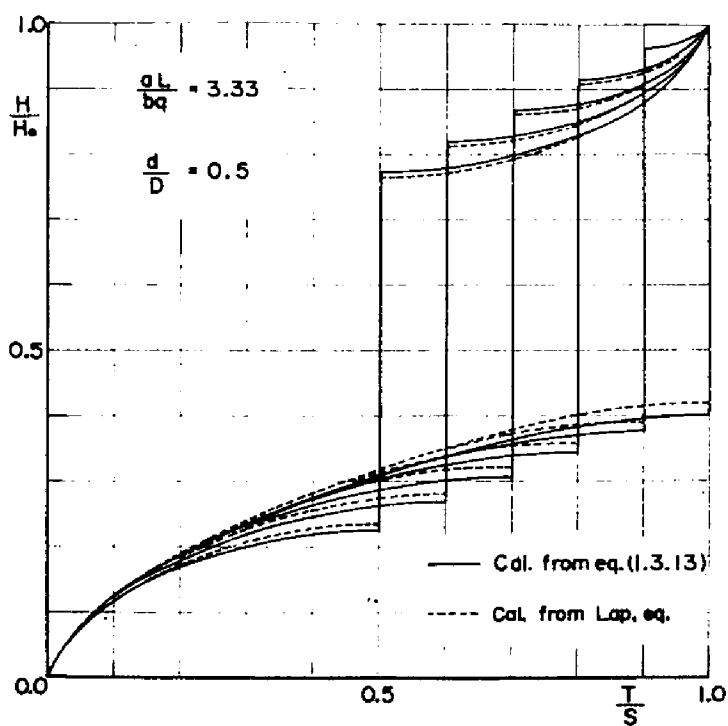
図 1.5.9(a)~(c)を用いて両理論解の比較を行なうと、ラプラス解に比較して本理論解による流速分布はかなり平均化されており、構造物に近い所の流速はラプラス解より小さく、構造物よりある程度離れると大きくなっている。これは、 V^2 に比例する抵抗の影響を強く受ける場所ではラプラス解にくらべ流速が小さくなり、流速の比較的小さい部分では前の浸透流量の減少分を補うため流速が増大することを示している。

さらに、数値解であるので細かい議論はしにくいですが、構造物上端部の流速は、 $T/S = 1.0$ の場合を除き、ラプラス解に比べて本理論解ではかなり減少していることが認められる。しかし、ラプラス解で無限大の流速となるような地点で、本理論解ではどの程度の流速になるかは明らかではなく、この領域への Forchheimer 則の適用性とともに問題として残るところである。

パイピング現象などを防止するためには局所的な高速流の生起を防止することが望まれるが、ここで示した流速分布を考慮すると sheet pile の設置位置は、構造物の上流または下流側の端が最もよい、と結論することができる。



(a)



(b)

图 1.5.9 扬压力分布

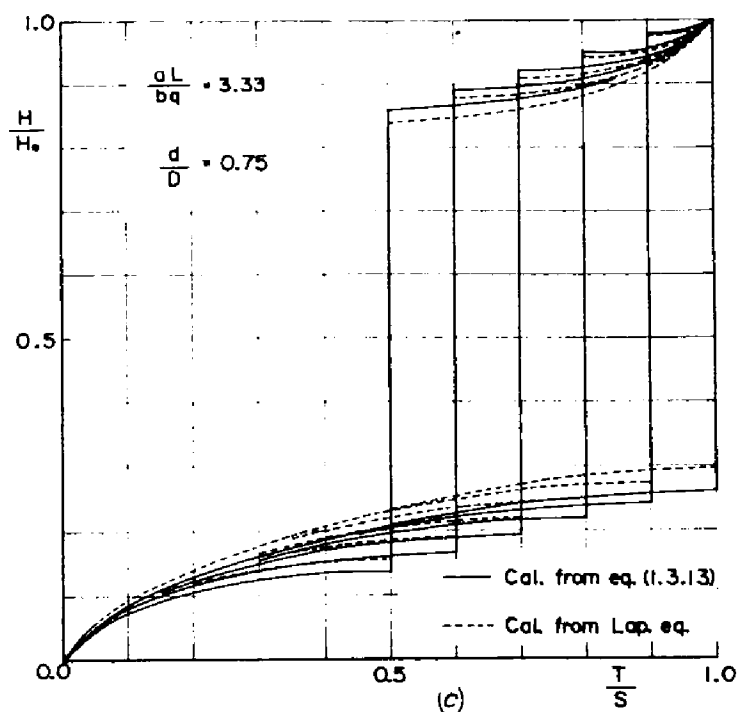


図 1.5.9 揚圧力分布

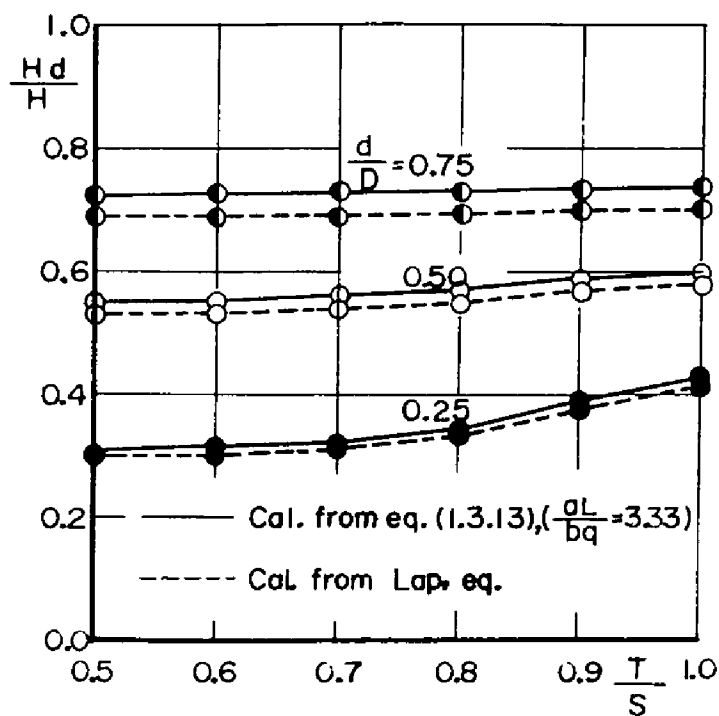


図 1.5.10 Sheet pileによる水頭損失量 Hd と配列形式

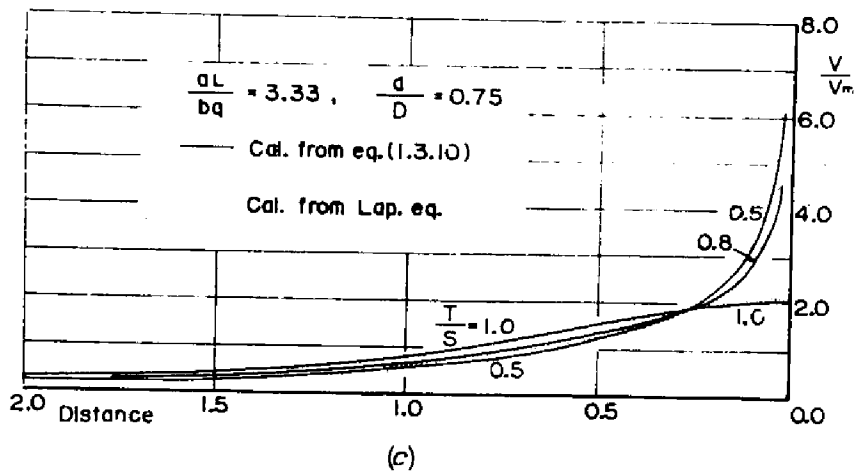
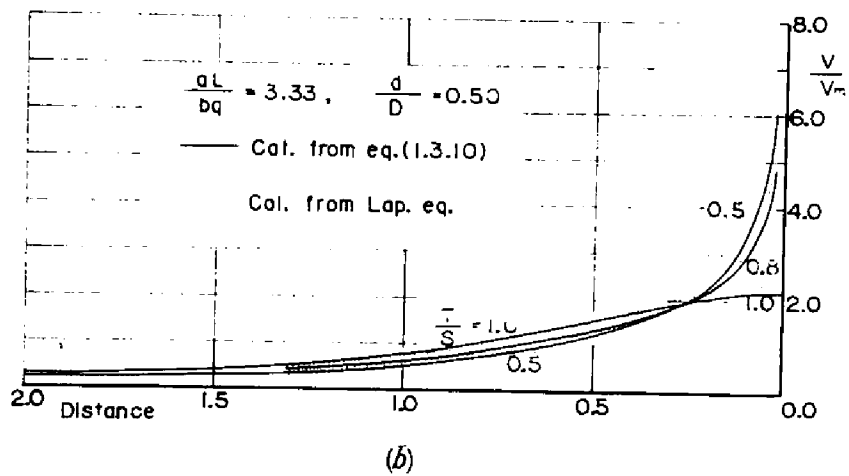
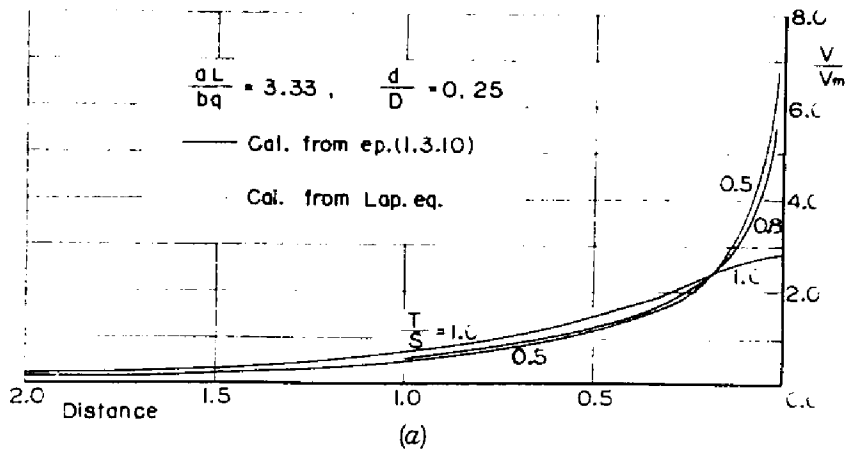


図 1.5.1.1 流入面における流速分布

第3節 二列の sheet pile を有するダム基礎地盤中の浸透流

本節では有限領域内の二列の sheet pile を有するダムの基礎地盤内の浸透流について解析検討を加える。前節と同様に、一つの無次元量 aL/bq について sheet pile の配列形式を色々変えて解析を行ない、浸透流の特性について論ずる。ここでは代表系として図 1.5.12 に示す解析領域を選ぶ。なお同図に示すとおりこの解析領域は中央軸を軸として左右対称であるので、この軸上で流れが対称であるという条件を考慮することにより左または右半面の領域について解析を行なえばよいことは自明である。同図に示すとおり、ダムの長さの $1/2$ を A 、中央軸から sheet pile までの距離を B とし、他の記号は前節と同様とする。ただ B が 0 のときは sheet pile は一列となる。

解析を行なう sheet pile 配列形式としては、上下流双方の sheet pile の長さは等しく、かつ中央から等距離にあるものとし、sheet pile の深さとして $d/D = 0.75, 0.50, 0.25$ の三種、sheet pile の位置として $A/B = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ の5種で、それぞれの組み合わせで15種を考える。ただ sheet pile が中央一列の場合については前節の計算結果を用いることとし、合計18種の sheet pile の配列形式について論議を進めることにする。

解析条件としては前節のものと同じく、 aL/bq に 3.333、格子間隔 $n/L = 0.05$ 、一点に許される誤差にはば 1×10^{-4} を採用して計算を行なった結果より次の各項目について考察を加える。

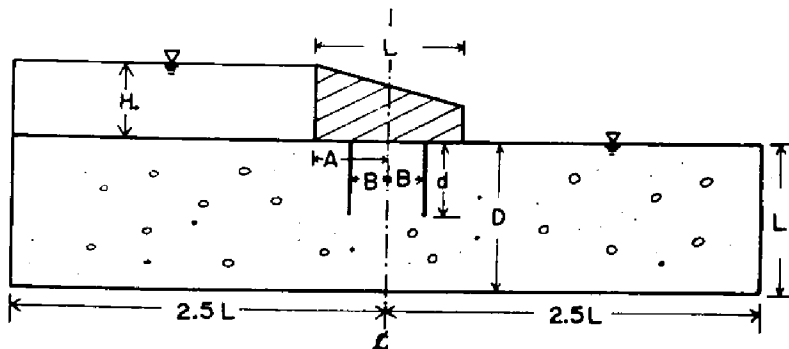


図 1.5.12 解析領域

3.1. 流線網

Sheet pile の配列形式が $d/D = 0.75$ 、 $A/B = 0.6$ の場合の流線網を図 1.5.13 に例示する。同図にラプラス解より得られる流線網を併示してある。この図で示される流線網は、図 1.5.6 に示す一列の sheet pile の場合と同様な特性を有しているが、特にこの場合は本理論解とラプラス解と比較して、sheet pile と sheet pile の間の流速が比較的小さい部分に流線が入り込み流速を平均化する傾向が顕著である。

3.2. 全損失水頭

図 1.5.14 に無次元量 $H_0 L/bq^2$ と sheet pile の深さ・位置との関係を示す。この図より、この系と相似な領域の各 sheet pile 配列形式における全損失水頭は、係数 a 、 b 、領域の代表寸法 L 、浸透流量 q を与えることにより容易に求められる。

図 1.5.14 を用いて、本理論解とラプラス解との比較を行なうことは不可能であるため、前節と同様な具体例により比較する。ただ本節では sheet pile の位置を表わすものとして前節の T/S のかわりに B/A を用いる。図 1.5.15 に全損失水頭 H と d/D 、 B/A との関係を示す。この図では、sheet pile の配列形式と止水効果との関係は、前節の図 1.5.8 で示した結果と同様な傾向にあり、定性的な傾向としてはラプラス解とそれほど大きな差は認められないが、sheet pile が深いほど、sheet pile が基礎の上流・下流の端に近いほどその効果は顕著である。前節の図 1.5.8 と比べると、1 列の sheet pile の配列の場合には設置位置により全損失水頭はそれほど影響されなかったが、2 列の sheet pile 配列の場合には設置位置にかなり影響されるのが認められる。

3.3. 揚圧力分布

図 1.5.16 (a)~(c) にダム底部に作用する揚圧力と sheet pile の位置との関係を示す。ここでは解析領域が左右対称であるので上流側の部分について示してある。なお各図にラプラス解より得られる揚圧力分布を併示してある。これらの図より、図 1.5.12 に示す系と相似な領域において、無次元量 aL/bq が 3.333 の場合のダム底面に作用する揚圧力を容易に求めることができる。

図 1.5.17 には sheet pile 一列分の水頭損失量 H_d と sheet pile の深さ d/D 、位置 B/A との関係を本理論解とラプラス解とを対比して示す。

これらの図に示されている特徴およびラプラス解との差は前節で示した一列の sheet pile の場合と同様のものである。ただ図 1.5.10 と図 1.5.17 を比較すると sheet pile による損失水頭は二列の sheet pile を設置する場合が、一列の場合より、設置位置により影響される傾向が強い。

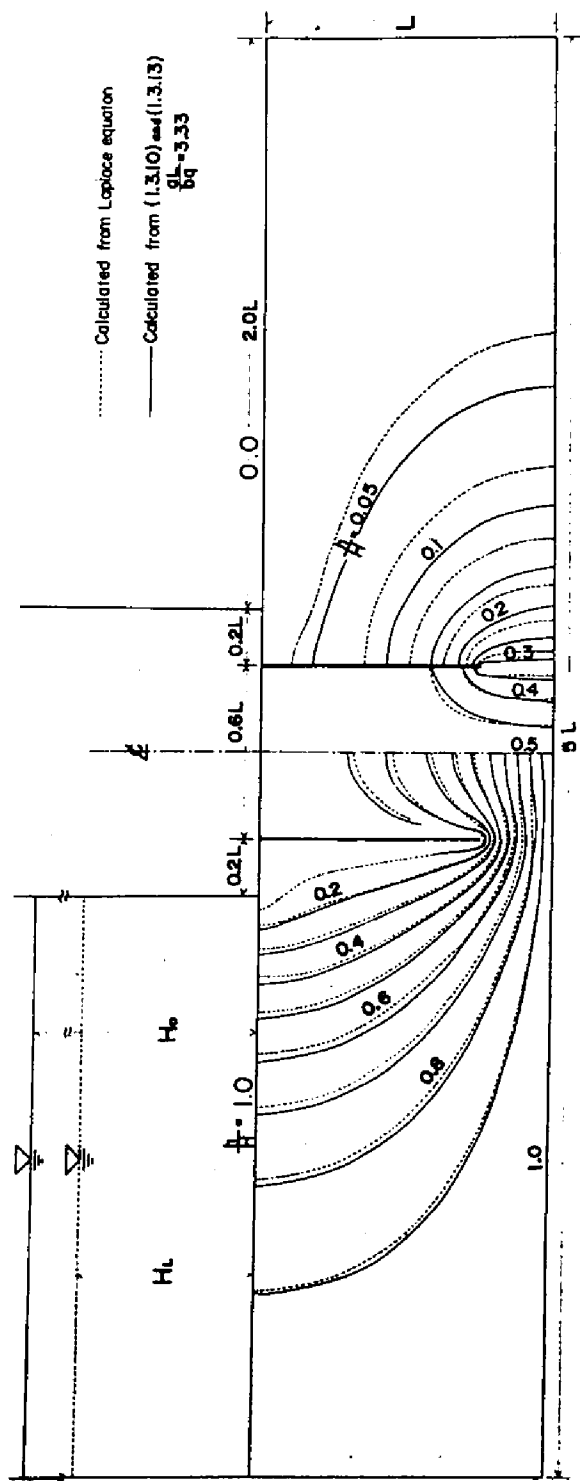


图 1.5.1.3 流线网

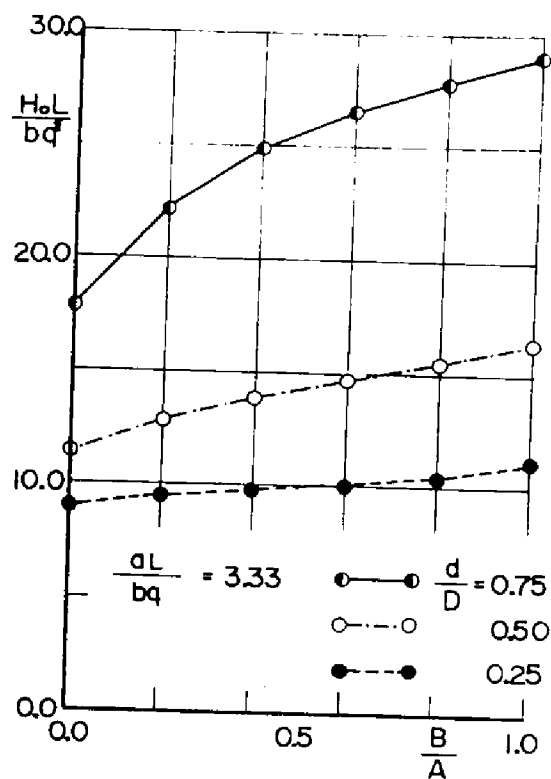


図 1.5.14 Sheet pile の配列と全損失水頭

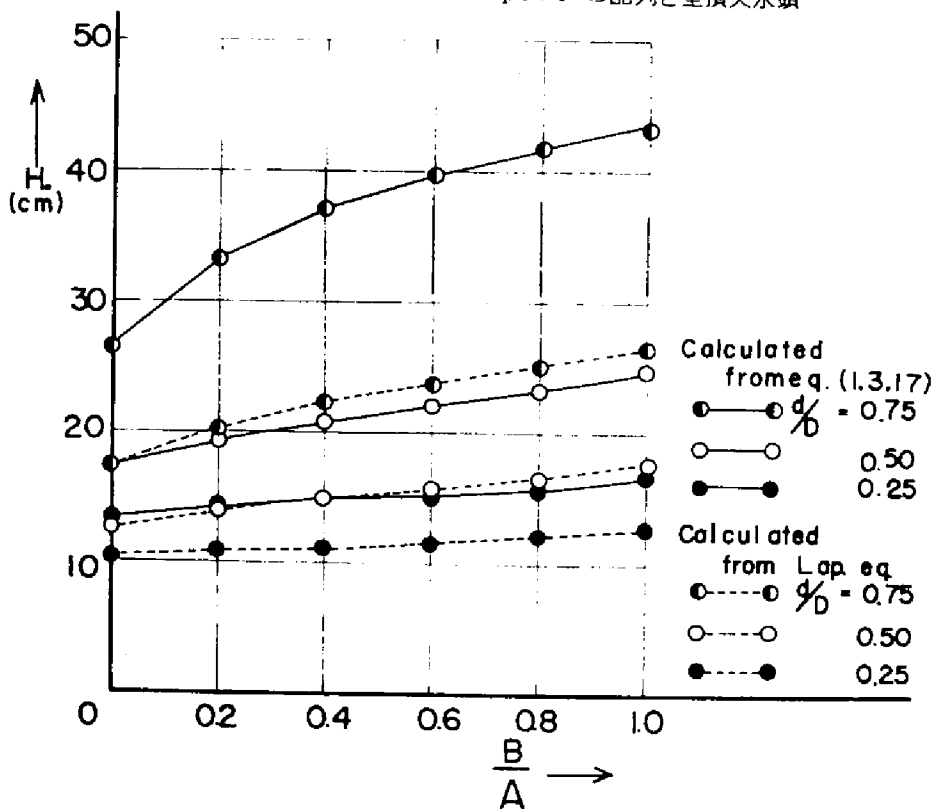


図 1.5.15 全損失水頭についての本理論解とラプラス解との比較

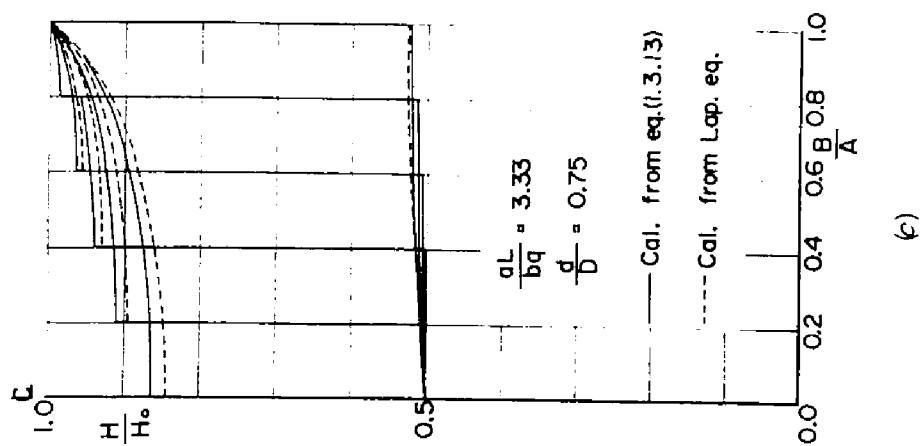
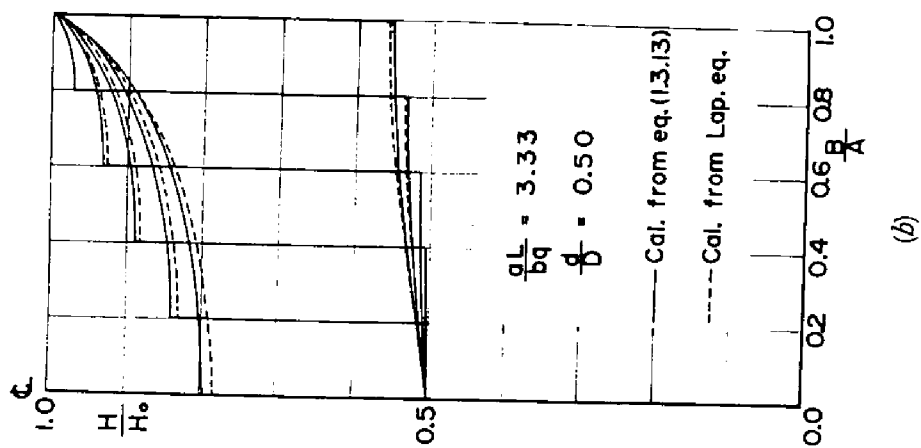
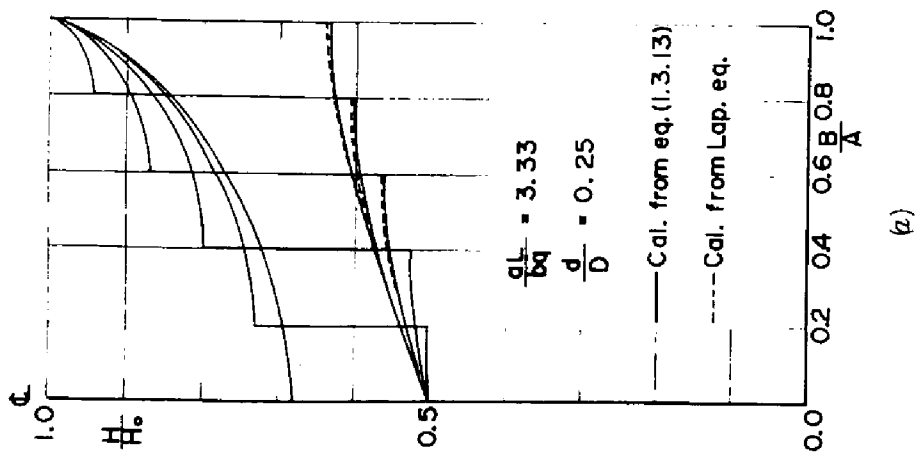


图 1.5.1 6 锡压力分布

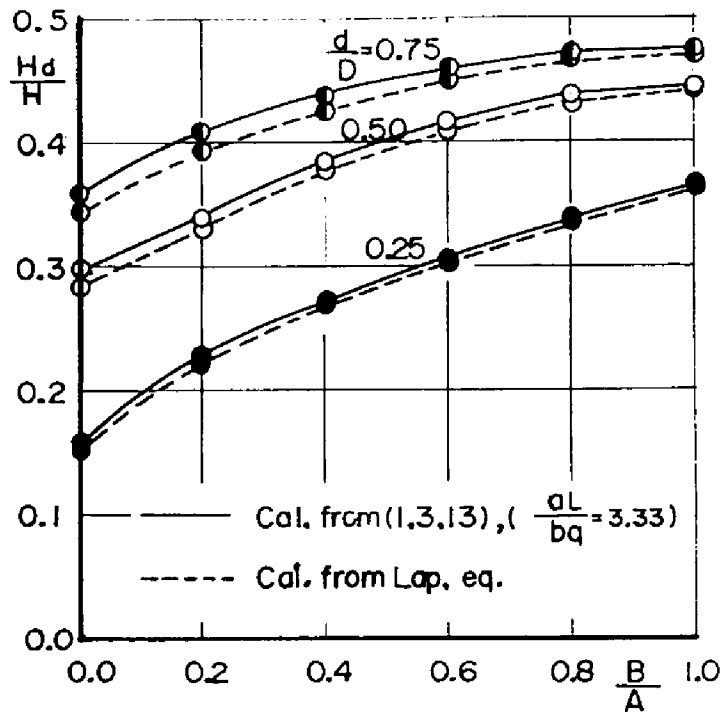


図 1.5.17 sheet pile 一列による水頭損失と配列

3.4. 流入面における流速分布

本節で行なった計算結果より，流入面における流速分布と sheet pile の位置との関係を整理して図 1.5.18(a)~(c)に示す。なお同図にラプラス解より得られる流速分布を併示してある。

ここで得られた流速分布の特徴およびラプラス解との差異は前節のものとほぼ同様である。

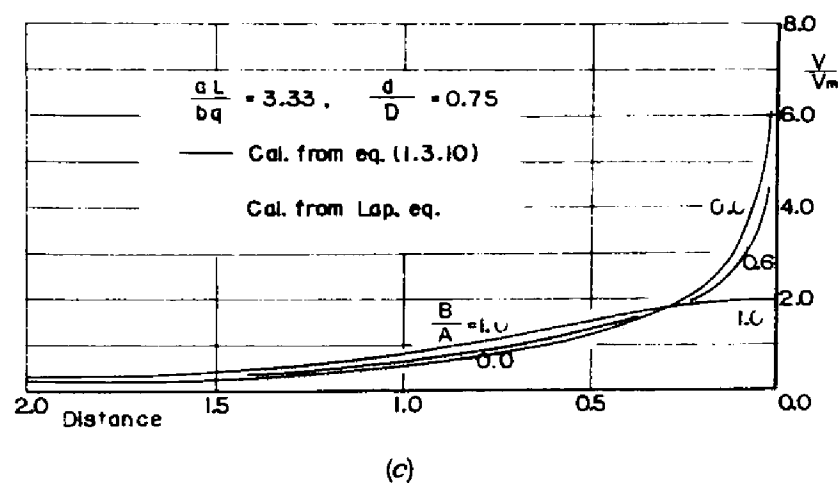
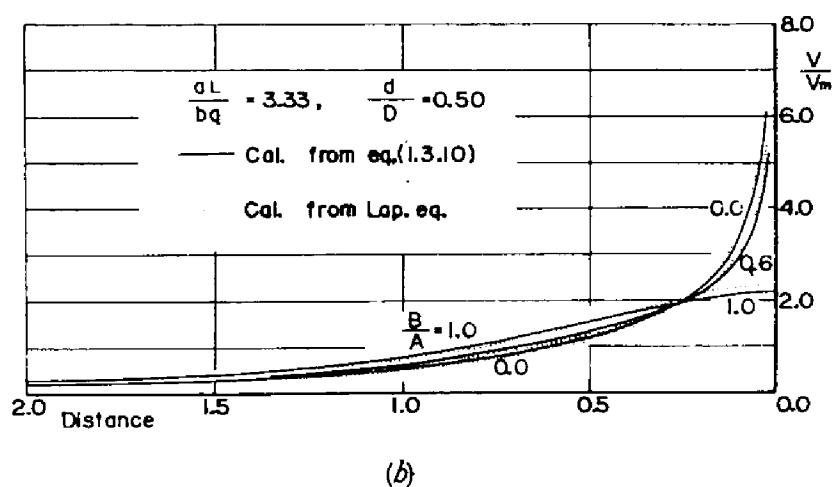
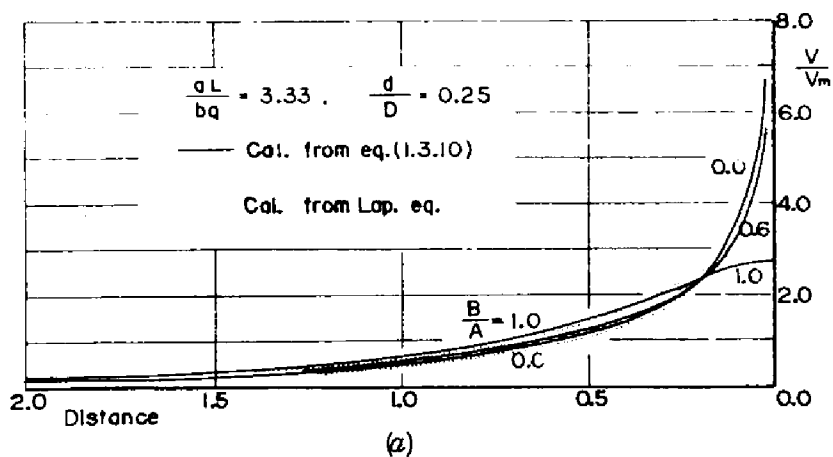


図 1.5.18 流入面における流速分布

第 6 章 結 論

以上、第 1 編では、抵抗則に Forchheimer 則を適用した場合のいくつかの confined seepage 問題に対する理論的実験的研究を行なった結果について述べた。これまで述べてきたことを要約すると次のようである。

第 1 章では、non-Darcy 流を考慮した confined seepage 問題を究明する必要性を指摘し、本研究の概要と過去に行なわれた研究の動向および本研究の経過について述べ、本研究の方針を明らかにした。

第 2 章では、浸透流の抵抗則について過去に行なわれた研究の概略を述べ、Forchheimer 則の理論的根拠と意義について若干の考察を行なった。

第 3 章では、第 1 節において confined seepage 問題へ Forchheimer 則を適用した場合の基礎方程式、境界条件を誘導し、第 2 節においてこの基礎方程式の差分近似式および数値解法を提示した。第 3 節では、ここで採用した数値解法において、工学的見地から十分な精度で解が得られる格子点間隔と打ち切り誤差について考察を加えるとともに加速係数と収束速度などについても論議を進め、電子計算機使用上の問題点を明らかにした。

第 4 章では、non-Darcy 流下で生ずる confined seepage 現象を把握し、本理論の適応性・有用性を立証するために行なった矢板のまわりの浸透流についての実験とその結果について述べ著者の提案する理論の有用性を立証した。

第 5 章では、本理論を実際に見られる 3 種の系に適用し、ラプラス解との比較検討より浸透流特性および sheet pile 配列形式とその効果について考察を加えた。

以上、要するに本研究では、これまであまり研究が行なわれていなかった Forchheimer 則が成立する流れの領域を考慮した confined seepage 問題を究明し、かなり興味ある事実を明らかにしたものであって、ここで示した理論的取り扱い法はこの種の問題が生じた場合の解決方法の一つと考えられる。

第Ⅱ編 自由水面を有する三次元浸透流の 解法と適用に関する研究

第1章 序 論

第1節 概 説

農業用水の確保や洪水災害防止などを目的として河川に設置されるアースダムや河川堤防などの盛土構造物内には浸透流が存在し、構造物の安全性および止水性に大きな影響をおよぼしている。一般にこの種の浸透流は自由水面を有しておりその取り扱いがかなりむずかしいので、未解明な問題が多く残されている。

また近年、湖沼の干拓、水資源開発、河川災害防止などを目的として、湖沼、河川の形態が人為的に変更される事例が多く見受けられるが、これらに伴う周辺地下水変動は農業生産に大きな影響をおよぼしている。すなわち地下水に古くから影響をおよぼしてきた前述の外的条件の変化によってひきおこされる地下水位の低下はカンガイ用水源の減少のみならず用水量の増大をもたらすなど農業用水に与える影響は小さくないため、このような広域地下水の変化に関する予測と対策方法の検討は重要な問題になりつつある。このような広域地下水は不圧地下水と被圧地下水とに大別されるが、前者は自由水面を有する地下水であり適当なモデル化を行なうことにより盛土構造物中の自由水面を有する浸透流と同様に取り扱いが可能になるものと考えられる。ただ被圧地下水については別の論議を行なう必要があるが、自由水面を持たないため数学的な取扱いはそれほど困難でない。

現在、この自由水面を有する浸透流の問題を扱うのに、鉛直二次元流についての数値解析法およびDupuit-Forchheimerの仮説¹⁾にもとづく準一様流を仮定した一次元ないし平面解析法が適用され、それぞれ一定の成果が得られている。しかし、盛土構造物では取付け部の条件、地下水では周辺の地形的条件および河川などの条件が地下水面に与える影響は小さくないと考えられるにもかかわらず、鉛直二次元流の解析法は水平方向に広がりを持つ問題には無力であり、一方平面解析法では鉛直方向の速度成分が考慮できないため詳細な論議は行えない欠点がある。本来、こうした問題は三次元的に扱わなければならないが、現今なお自由水面を有する浸透流の三次元解析法は確立されておらず、不十分な状態に止まっているといつてよい。

さて自由水面を有する浸透流を理論的に取り扱う方法は次の二種類に大別しうる。

まず、動水勾配が比較的ゆるやかな広域地下水に関する問題によく適用される Dupuit-Forchheimer の仮説¹⁾にもとづく準一様流とした取り扱い方法があり、この場合の基礎式は Boussinesq の式²⁾としてよく知られている。この理論では鉛直方向の流速成分を無視し、自由

水面の位置を不透面からの高さで表わしているため、自由水面形を決定するための複雑さがなく、解析は比較的容易である。また地下水の時間的変化を容易に考慮しうるので、かなり広い範囲の問題に適用され実用に供されている。しかし鉛直方向の速度成分が無視されているため、この理論的取り扱いには本質的に適用限界が存在し、厳密な理論的検討は不可能である。

他に、基礎方程式に confined seepage 問題の場合と同じラプラスの方程式を用い、自由水面を有する potential flow とする取扱方法がある。confined seepage 問題では多くの場合あらかじめ与えられた境界内における未知函数を決めることが目的であるが、自由水面を有する浸透問題 (unconfined seepage 問題) では領域内の方程式は与えられるが、自由水面形すなわち境界が完全に与えられず、それを決めることも解の一部として要求されている。このような自由水面を有する浸透流の問題は未知境界問題とも言われ、一種の非線形問題であるため^{3), 4)}、解析法はきわめて複雑であり、鉛直二次元流とした場合についてのみに一応の解法が確立されているにすぎない。このように自由水面を有する三次元浸透流の解析手法は確立されておらず、多くの浸透問題が未解明のまま残されている現状である。

そこで本研究では、自由水面を有する浸透流を三次元的に解析する手法を確立し、その解法を適用しアースダム浸透流の三次元的特性および一つの広域地下水問題の解明を試みる。

本研究では、はじめ自由水面を有する三次元浸透流の解析を目的とした数値解法を提示し、これを二次元系に適用し数例の既存解との対比によりこの解法の有用性を確かめるとともに、この解法の計算精度および収束性などについて検討吟味する。

次に、アースダム中の三次元浸透流について解析を進め、二次元流とした場合の計算結果との対比より、三次元的特性および地山取付部の影響とその範囲について究明する。

最後に広域地下水問題の一つとして、琵琶湖周辺部の複合扇状地を対象領域に選り、解析を進め、この解法を用いたモデルの適応性を検討するとともに、この地区の地下水特性について若干の考察を加える。

第 2 節 従来の研究

自由水面を有する浸透流の問題では、解析当初境界の一部である自由水面形が未知であるため、この境界と領域内の水頭分布を同時に決定することが要求される。現在までに、この問題の解を得る方法として、解析的な方法とアナログモデルを用いる方法が開発され実用に供されてきた。ここではそれぞれの方法について研究進展過程を振り返り、三次元問題への適用性について考察する。

2. 1 解析的手法による解法

(1) ホドグラフ法による解法

G. Hamel und E. Günther,⁵⁾ M. Muskat,⁶⁾ B. Davison,⁷⁾ などは、1930年代に長方形ダム内の二次元浸透流にホドグラフ法を適用し解析解を求めた。この解法はきわめて繁雑であり、その上、ホドグラフ面から実平面へ写像変換がうまく行なえない場合が多いため、適用範囲はきわめて狭く、その後研究はあまり行なわれていないようである。もちろんこの解法の三次元問題への拡張は不可能である。ただこの解は厳密解とみなせるため、その後開発された近似解法の有用性を検討する意味で重要な役割を演じてきたといえる。

(2) Relaxation法を用いる方法

基礎式であるラプラスの方程式を差分近似式に展開し、relaxation法を用いて数値的に解き、同時に自由水面形を試算により決定する解法が1941年にF. S. Shaw, R. V. Southwell⁸⁾によって案出され、1968年にE. J. Finnemore, B. Perryによってその若干の改良と電子計算機を用いて解析する手法が考え出されている。この解法は任意形状の鉛直二次元断面についての解析が可能であるため、適用範囲も広く、かなりの問題が解かれている。しかし、自由水面形を決定するための試算が繁雑であり、かなりの経験を要するためこの手法の三次元系への拡張はきわめて困難である。

著者が本研究で提案する手法はrelaxation法を用いて堤体内の水頭分布を計算する意味ではこの分類に属するが、自由水面形の取り扱いにShaw and Southwellの手法とは異なり自由水面を格子点をとる直線で近似することによって自由水面形の修正を簡単化し、三次元系への適用を容易にしたものである。

(3) Finite element methodを用いる方法

Finite element method¹⁰⁾ (有限要素法)は電子計算機の発達とともに急速に発達した数値計算法であるが、自由水面を有する浸透流の問題にもこの解法の適用が試みられ、二次元系の解について一、二の報告がある。^{11) 12)} この手法は解析領域の異方性の問題、non-Darcy流を考慮した浸透問題など浸透流の全般の問題に適用できることから、この解法の将来性・発展性にかなりな期待がもてるが、ただこの手法の三次元問題への拡張はかなり繁雑となるようであり、現在の電子計算機の規模・容量の制約もあって三次元系について解析された事例は見当らない。

(4) フーリエ級数を用いる方法

J. A. Toth¹³⁾ などによりフーリエ級数を利用した解析法が研究されている。この方法は解析領域を長方形領域に近似し、この長方形の各辺に境界条件として適当な函数を与え、フーリエ級数を用いてラプラスの方程式を解く近似的な解法である。この方法は大まかな水頭分布を求める

ことを目的とし、詳細な自由水面形の議論は目的としない。三次元問題への展開はきわめて困難である。

2. 2 アナログモデルを用いる解法

(1) 電氣的相似を用いる方法

この方法は R. D. Wyckoff, D. W. Reed¹⁴⁾ らによって開発されたもので、浸透流と電場を作るポテンシャル場との相似性を利用したものである。これは炭素の極微粒子を塗布した抵抗膜で堤体を作り、境界条件としてそれに相当する電圧を与え、この抵抗膜を切断しつつ自由水面形を逐次修正して解を得る方法である。この方法では膜が使用されるので過剰な領域を切断した場合、復元できないという不便さがあり、三次元問題への拡張は不可能である。ただ、赤井・宇野¹⁵⁾ らの研究にみられるようにこの膜のかわりに三次元伝導体を形成しうる寒天材料を用いれば同じ原理により三次元問題への適用は可能となる。

この膜状の抵抗体を用いるかわり高抵抗を有する伝導体として、抵抗素子よりなる networks¹⁶⁾ を用いることが考えられ、R. Herbert and K. R. Rushton¹⁶⁾ などによりこの種の問題が研究されている。この方法は抵抗膜を用いる方法に比べて、自由水面形の試算が容易であること、抵抗値を変化させた素子を用い異方性の問題が扱えること、M. R. Starr, B. O. Skipp, D. A. Clarke¹⁷⁾ の研究にみられるように三次元的な networks を組むことにより三次元問題にも適用しうること、などの利点を有している。またタングステン電球を抵抗素子に用いると電流と抵抗値との関係が直線にならぬことを利用して non-Darcy 流の問題を扱った研究¹⁸⁾ もある。

以上に示したように、この手法はかなりの利点を有し、多くの問題に適用可能であるため今後の発展が予想されるが、問題が複雑になるにしたがい実験装置がかなり大規模になり、手軽に使用しにくい点が欠点である。

(2) 流体力学的相似を用いる方法

粘性流において Reynolds 数が小さく粘性項にくらべて慣性項が無視しうる場合には、狭い壁間の粘性流の解にみられるように流速と動水勾配とは比例関係にある。この事実を Darcy 則と対比させ浸透流のモデルを案出したものに Hele-Shaw¹⁹⁾ の実験装置がある。Hele-Shaw モデルは原理的に三次元問題への適用は不可能であるが、三次元の格子状に組まれた細管網を用い三次元問題を解こうとする試みがある。²⁰⁾ このモデルを使用する利点は、非定常問題に適用しうること、壁間距離や管径を変えることにより異方性領域の浸透流も扱えることなどである。

ただ、実験は温度に大きく影響され、細かい物理量の測定が困難であるなど問題点もあり、モデルの製作もかなりむずかしいので適用範囲もかぎられてくる。

これらの他に、ガラス球を用い堤体を形成し強粘性流を流すことにより浸透問題を解くことも²¹⁾考えられている。

以上に示したように自由水面を有する浸透流の問題については解析的実験的に多くの研究手法があり、提起された問題によって適宜手法を選び、実用的な解が得られている。しかし三次元問題への適用性についてはいずれの方法とも問題点を有し、容易には三次元解が得られない現状にあると考えられる。すなわち、どの解析手法とも、いまのところ適用が二次元問題に限られ、三次元問題について解析された事例を見ることはできない。なおアナログモデルによる三次元問題に対する実験的研究は皆無ではないが、概して実験装置が大規模になり手軽に高精度の解を得ることは不可能に近い難点のあることは前述のとおりである。

参 考 文 献

- 1) Todd, D. K. : Groundwater Hydrology, John Wiley & Sons, P. 79, 1959.
- 2) たとえば、ペ・ペ・クリメントフ, ケ・ペ・ライハチェフ, 外尾善次郎 永井正夫訳, 地下水の力学, ラティス刊, P. 127, 昭42.
- 3) Bickley, W. G. : Some problems concerning linear differential equations made nonlinear by unknown or moving boundary, in Non-linear Problems of Engineering, edited by W. F. Ames, P. 90, Academic press, 1964.
- 4) 正野重方 : 緩和法入門, pp. 131-134, 朝倉書店, 昭38.
- 5) Hamel, G. und E. Günther : Numerical Durchrechnung zu der Abhandlung über Groundwasser strömungen, ZAMM XV, P. 255, 1935.
- 6) Muskat, M. : The Seepage of Water through Dams with Vertical Faces Physics, vol. 6, pp. 402-415, 1935.
- 7) Davison, B. : On the Steady Motion of Ground-Water through a Wide Prismatic Dam, Phil. Mag. (7) vol. 21, pp. 904-922, 1936b.
- 8) Shaw, F. S. and R. V. Southwell : Relaxation methods applied to engineering problems VII. Problems relating to the percolation of fluids through porous materials, Proc. Roy. Soc. A, 178, pp. 1-17, 1941.
- 9) Finnemore, E. J. and B. Perry : Seepage through an Earth Dam Com-

- puted by the Relaxation Technique, Water Resources Research, vol. 4, pp. 1059-1067, 1968.
- 10) O. C. ツィエンキーヴィッツ, Y. K. チューン, 吉識雅夫監訳: マトリックス有限要素法, pp. 162-184, 培風館, 昭45.
- 11) たとえば Volker, R. E. : Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements, Proc. of A. S. C. E., vol. 95, Hy 6, pp. 2093-2114, 1969.
- 12) たとえば 川本眺万・駒田広也・宮口友延: 堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について, 土と基礎, vol. 18, №12, pp. 19-26, 1970.
- 13) Toth, J. A. : Theoretical Analysis of Ground Water Flow in Small Drainage Basins Central Alberta, Canada, J. G. R., vol. 67, №11, pp. 4375-4387, 1962.
- 14) Wyckoff, R. D. and D. W. Reed : Electrical Conduction Model for the Solutions of Water Seepage Problems, Physics, vol. 6, pp. 395-401, 1935.
- 15) 赤井浩一・宇野尚雄: 長良川河口ゼミ計画にともなう堤防漏水調査, 京大防災研年報, 第13号B, pp. 171-185, 1970.
- 16) Herbert, R. and K. R. Rushton : Ground-Water Flow Studies by Resistance Network, Géotechnique, vol. 16, pp. 53-75, 1966.
- 17) Starr, M. R., B. O. Skipp and D. A. Clarke : Three Dimensional Analogue Used for Relief Well Design in the Mangla Dam Project, Géotechnique, vol. 19, №11, pp. 87-100, 1969.
- 18) J. Baturić Rubčić : The Study of Non-Linear Flow through Porous Media by Means of Electrical Model, Journal of Hydraulic Research, vol. 17, pp. 31-65, 1969.
- 19) 近坂百一: 地下水の二次元不定流の近似解法について, pp. 1-5, 昭24.
- 20) 松尾新一郎・河野伊一郎: 地下水壁による地下水規制の実験的研究, 土木学会論文報告集, №178, pp. 53-62, 1970.
- 21) 内田茂男: 自由境界を有する非定常浸透流について, 土木学会誌 vol. 37, pp. 58-62, 1952.

第2章 自由水面を有する定常三次元浸透流の解析法

第1節 基礎方程式および境界条件

一様な porous media内の定常浸透流が Darcy 則に従うものとする基礎方程式は(2.2.

1)式で表わされる。

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots (2.2.1)$$

いま

$$X = \frac{x}{\sqrt{k_x}} \quad Y = \frac{y}{\sqrt{k_y}} \quad Z = \frac{z}{\sqrt{k_z}}$$

とおくと、次のラプラス方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} = 0 \quad \dots\dots (2.2.2)$$

ここで $H = \frac{P}{\omega} + y \quad \dots\dots (2.2.3)$

H : 水頭〔L〕, P : 圧力〔M/L²〕
 ω : 単位体積重量〔M/L³〕, y : 基準面からの高さ〔L〕
 x, y, z : 座標〔L〕
 k_x, k_y, k_z : それぞれ x, y, z 方向の透水係数〔L/T〕

図2.2.1のような解析領域を考えると各境界に対する条件は次のとおりである。

- (1) 上・下流面ABおよびCE : これらの面では水頭Hは一定であるから

$$\left. \begin{aligned} H|_{AB} &= H_0 \\ H|_{CE} &= H_f \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2.2.4)$$

- (2) 不透面BC : この面を横切る流れは存在しないため、

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \nu} \right|_{BC} = 0 \quad \dots\dots (2.2.5)$$

ここで ν : 不透面の法線長

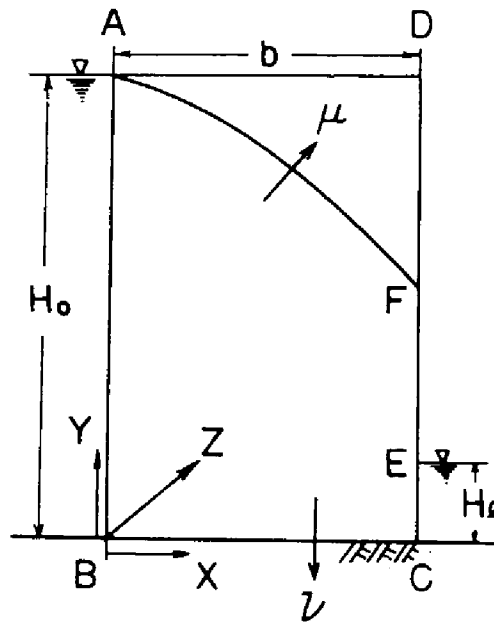


図 2.2.1 座 標 系

- (3) 浸出面 EF: この面上では圧力は 0 であるので

$$H|_{EF} = y \quad \cdots \cdots (2.2.6)$$

ここで y: 基準面からの高さ

- (4) 自由水面 AF: 自由水面を横切る流れは存在しないため

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mu} \right|_{AF} = 0 \quad \cdots \cdots (2.2.7)$$

ここで μ: 自由水面の法線長

この面上では圧力 P は 0 であり、水頭 H は基準面の高さに等しいため

$$H|_{AF} = y \quad \cdots \cdots (2.2.8)$$

自由水面上では、これら二条件式が同時に満足されなければならない。

第 2 節 数値計算法

この問題の数値解法として Shaw と Southwell²⁾ は前述の諸式とはほぼ同等の圧力 P で表わされる基礎方程式、境界条件を用い、二次元問題のための計算法を提案した。これは、まず自由水面を任意に仮定した後、(2.2.4)～(2.2.6)、(2.2.8) 式相当の境界条件を考慮して基礎式を解き、自由水面の位置を(2.2.7) 式相当の条件式で判定して修正する。この計算を自由水

面の位置の修正不要となるまで続ける逐次近似解法である。この方法は自由水面の位置の修正方法が繁雑であって、三次元解析への拡張はかなり困難である。

著者は、自由水面の位置の修正をより簡単に行なうため、仮定した自由水面形のもとで、基礎方程式を境界条件(2.2.4)～(2.2.7)式を用いて解き、(2.2.8)式でその位置の適否を判定し、修正する逐次近似解法を提案する。ここで解析領域を立体格子で分割する。数値計算に際し自由水面が格子点間に入ると(2.2.7)式の導入がかなり繁雑になるので、格子点間隔を小さく取るものとして自由水面形を格子点を通る直線で近似する。これによって(2.2.7)式の導入が簡単になる。

2.1 差分近似式とS. O. R.法の基本型

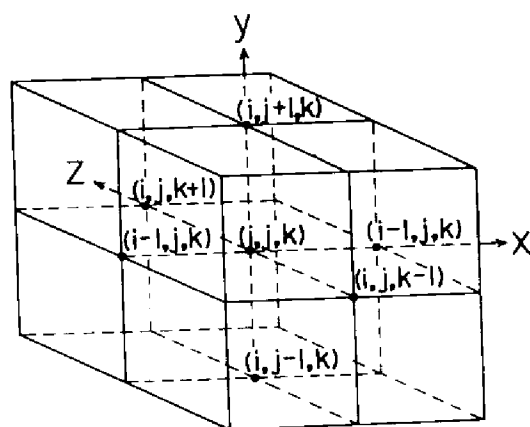


図 2.2.2 格子点と記号

図 2.2.2 の場において(2.2.1)式を差分近似式で表わすと(2.2.9)式となる。

$$\begin{aligned}
 & k_x \left\{ \frac{H_{i+1,j,k} + H_{i-1,j,k} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} \right\} + k_y \left\{ \frac{H_{i,j+1,k} + H_{i,j-1,k} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} \right\} \\
 & + k_z \left\{ \frac{H_{i,j,k+1} + H_{i,j,k-1} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} \right\} = 0 \quad \dots\dots (2.2.9)
 \end{aligned}$$

ここで、 $H_{i,j,k}$: 格子点 (i, j, k) の水頭値

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: それぞれ x, y, z の格子点間隔

いま、領域内水頭分布をS. O. R.法を用いて解くことにする。

$$\alpha_x = \frac{k_x}{(\Delta x)^2} \quad \alpha_y = \frac{k_y}{(\Delta y)^2} \quad \alpha_z = \frac{k_z}{(\Delta z)^2} \quad \dots\dots (2.2.10)$$

とおき (2.2.9) 式を S. O. R. 法の基本形になおすと (2.2.11) 式を得る。

$$H_{i,j,k}^{n+1} = H_{i,j,k}^n + RA \quad \dots\dots (2.2.11)$$

ここで

$$RA = w \times \left\{ \frac{\alpha_x (H_{i+1,j,k}^{n+1} + H_{i-1,j,k}^n) + \alpha_y (H_{i,j+1,k}^{n+1} + H_{i,j-1,k}^n) + \alpha_z (H_{i,j,k+1}^{n+1} + H_{i,j,k-1}^n)}{2(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)} - H_{i,j,k} \right\} \quad \dots\dots (2.2.12)$$

n : S. O. R. 計算における繰り返し数

w : 加速係数

なお (2.2.11) 式の収束の判定としては、あらかじめ小さな値 ϵ を与えておき (2.2.11) 式における H の修正量 RA の、その系の一回の緩和計算における各点での絶対値の総和 ER が ϵ より小さくなったとき収束したものとみなす。

$$\epsilon > ER = \sum |RA| \quad \dots\dots (2.2.13)$$

2.2 境界条件の導入

(i) 自由水面について

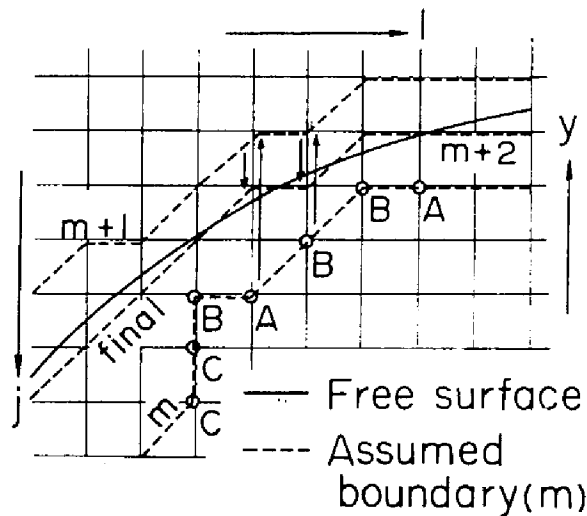


図 2.2.3 自由水面形の近似的表示と収束過程

図 2.2.3 に示すように自由水面を格子点を通る直線で近似すると、自由水面を表わす格子点の状態は同図における A, B, C のいずれかである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{すなわち, A点において } H_{i,j+1,k} = H_{i,j-1,k} \\ \text{B点において } H_{i,j+1,k} = H_{i,j-1,k} \\ \text{および } H_{i-1,j,k} = H_{i+1,j,k} \\ \text{C点において } H_{i-1,j,k} = H_{i+1,j,k} \\ \text{または } H_{i+1,j,k} = H_{i-1,j,k} \end{array} \right\} \quad \cdots (2.2.14)$$

とおき、これらを (2.2.12) 式に代入することにより (2.2.7) 式の導入が近似的に達成される。これらは二次元領域についてのものであるが、三次元領域の場合に対しても、同じ関係式を z 方向に考慮することにより容易に拡張しうる。

上述の取扱いに関連して (2.2.8) 式は次のように書き直される。

$$|H|_{\text{free surface} - y} < dy/2 \quad \cdots (2.2.15)$$

(ii) 不透面について

不透面を格子点を通る直線で近似すると、自由水面と同様な取扱いにより容易に境界条件を導入しうる。

(iii) 上・下流面について

上下流面を表わす格子点上では水頭値は既知であり、各格子点にこの値を与えることにより、

(2.2.4) 式は満足される。

(iv) 浸出面について

浸出面については、それを表わす格子点にその地点の基準面からの高さを与えることにより、

(2.2.6) 式は満足される。ただ浸出面の上限は、自由水面が浸出面に接近する直線の延長と浸出面との交点をもって近似的に表わす。

2.3 計算手順

この逐次近似解法には非常に多くの繰り返し計算を要するため電子計算機を用いて計算する。

この場合の main program の flow chart の概略を図 2.2.4 に示す。すなわち、計算手順としては各種データを読み込んだ後、自由水面の位置を仮定し、解析領域内の各格子点に水頭分布の初期推定値を与える。これらの初期推定値は計算量軽減のため真の値に近いことが望ましい。次に subroutine RELAX により、仮定された自由水面形と上下流面および不透面で囲まれる解析領域内の水頭分布を、S. O. R. 法を用いて計算する。なお自由水面の近似度が低い間は高精度の水頭分布を必要としないから、水頭 H についての緩和計算回数は自由水面の修

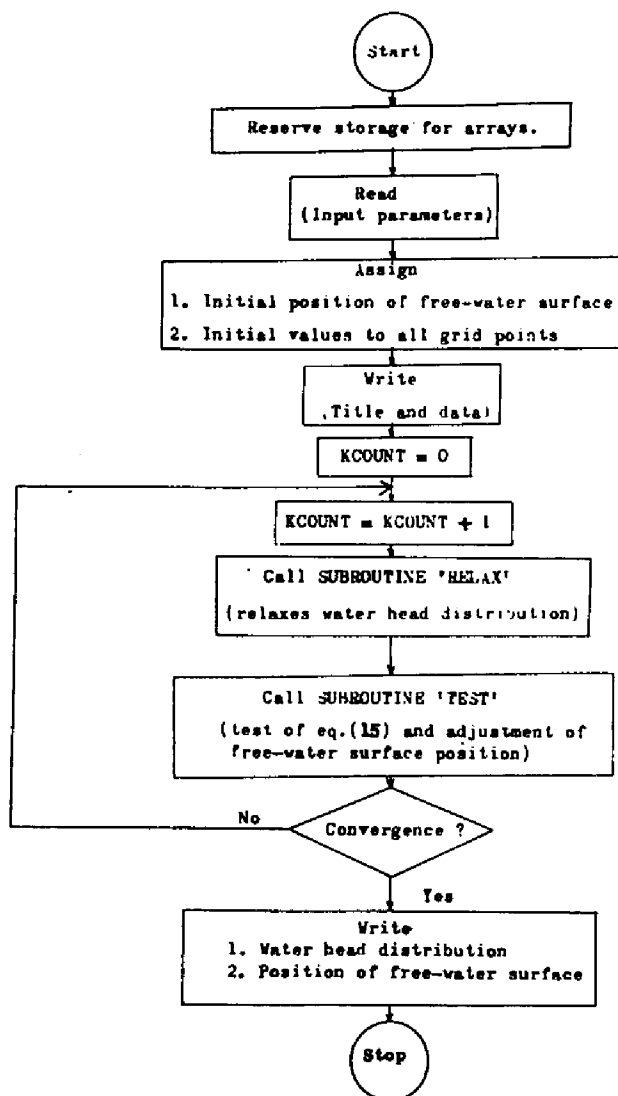


図 2.2.4 . Main program の flow chart

正計数 KCOUNT に応じて決定する。もちろん、自由水面がかなり修正された段階では高精度の水頭分布を必要とするので収束判定式すなわち (2.2.13) 式による。

以上のようにして水頭値を計算した後 subroutine TEST により自由水面の位置の適否を (2.2.15) 式を用いて判定し修正する。図 2.2.3 に、第 m 近似の自由水面が第 m+1 次近似を経て最終的に決定されるまでの過程を二次元領域について例示する。第 m 次近似の自由水面を近似している格子点において、計算値が (2.2.15) 式を満足していなければ、その点で得られた値にもっとも近い位置の格子点を自由水面と仮定して、第 m+1 次近似とする。

自由水面を近似している全格子点で (2.2.15) 式が満足したとき、自由水面形は収束したものとなす。もし収束していないならば新しく仮定された自由水面の下で計算をやりなおし、収束するまでこれを繰り返す。なお最終的には、自由水面の位置は近似している格子点上で得られた水頭値で表わし格子点そのものでは表わさない。図 2.2.3 では実線で示される曲線が最終的に得られた自由水面形である。

第 3 節 解析手法に関する考察

この種の数値計算では、常に得られた結果の精度、収束性、収束速度などが問題となるが、これらはいまの場合、格子点間隔、自由水面の直線近似と初期推定値、水頭値の打ち切り誤差などが複雑に関連するので一般的論議はむずかしい。そこで、ここでは代表的な解析領域を選定して数値計算を行ない、その結果をとおして格子点間隔と計算精度および加速係数について考察を加える。

3.1 計算結果の精度

これまで三次元解析の行なわれた事例についての報告は少なく、三次元系の既存解との比較は不可能であるため、二次元系について得られた結果について考察する。なお、この解法で求められた計算結果と既存解との差を自由水面を近似している格子点の y 軸上の差として表わし、(2.2.16) 式で定義される偏差 E_s をもって、自由水面形についての計算精度を表わす指標とする。

$$E_s = \frac{L \sum_{i=1}^L \sqrt{(y_{0,i} - y_i)^2}}{L} \quad \dots\dots (2.2.16)$$

ここで、 $y_{0,i}$: 既存解における自由水面の規準面からの高さ

y_i : この解法で求められた自由水面の規準面からの高さ

L : 自由水面を近似している格子点数

二次元系についての計算結果は過去いくつか報告されているが、ここでは次の 3 case を対象

とする。図 2.2.5 に case A として不透水性地盤上に設置された高さ 2.4 m, 巾 1.6 m の長方形ダム, 図 2.2.6 に case B として透水層上に設置されたアースダムについて, それぞれ Shaw, Southwell⁴⁾ によって得られた計算結果とこの解法で得られた計算結果と対比し図示する。図 2.2.7 に case C として不透水性地盤上の長方形ダムについて Herbert, Rushton⁵⁾ により resistance analogue の手法を用いて得られている計算結果を対比して示す。なお, case A, B の計算に際し, 格子間隔は原著者のそれに一致させてある。他の計算条件としては図 2.2.5 の場合, 水頭分布の収束判定値 ϵ に 0.1 (一格点の修正量 R は最終的には領域内の交点数が 312 点となったので $10^{-2} \sim 10^{-3}$ のオーダーとなり実用的には十分な精度と考えられる), 加速係数 w に 1.8, 透水係数 k_x, k_y に 1.0 を用い, 上端に自由水面の初期推定値を取り, 自由水面の位置を 17 回修正することにより得られたものである。図 2.2.6 の場合は ϵ に 0.1, w に 1.8, k_x と k_y に 1.0 を用い, 上端に自由水面の初期推定値を取り自由水面を 20 回修正することにより得られたものである。図 2.2.7 に示す計算結果は Herbert, Rushton が用いた resistance analogue model の element の大きさに相当する格子点間隔を用い, ϵ に 0.1, w に 1.8, k_x と k_y に 1.0, 上端に自由水面の初期推定値をとり, 自由水面の位置を 20 回修正することにより得られたものである。

各 case について既存解との比較を E_s および E_b を全水頭差 ($H_0 - H_f$) との比で表わしたものを表 2.2.1 に示す。ここで既存解の自由水面の位置 $y_{0,i}$ は, case A については Finne-
more, Perry の論文で示されている値を変換したものであり, case B, case C についてはそれぞれの論文中的図から読み取った値である。表 2.2.1 により, 既存解との比較において, 自由水面を全水頭差の 1% 以下の精度で決定しうることが認められる。既存解との比較で全水頭の 1% という誤差が数値的厳密性からは問題であろうが実用的には十分な精度と考えられよう。

なお, 水頭分布については, 各計算結果とも既存解ときわめてよい一致をしている。

これらの結果より, ここに提示した解法の有用性は十分認められるといえよう。

3.2 格子点間隔と計算精度

この解法の有用性は十分認められるが, これには多量の計算が必要であるので, ここでは図 2.2.8 の系についての計算をとおして格子点間隔と求められた自由水面の精度との関連について考察し, 計算量軽減の可能性を検討する。

図 2.2.8 に示す系は $H_0 = 4.0$ の場合, Shaw および Southwell によって解析された領域と同じものであるが, 下流側水位 H_f が 8.0, 1.20, 1.60 である場合も加えて格子点間隔と計算精度について考察を進めて行くことにする。

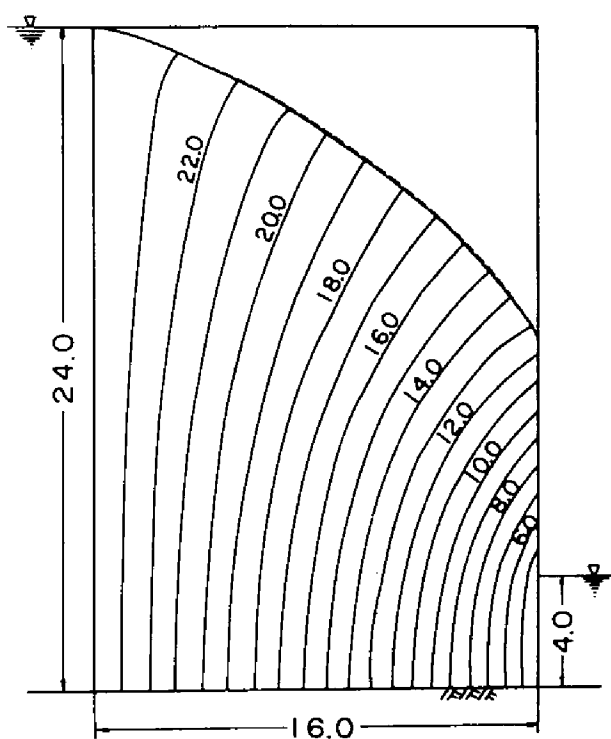


図 2. 2. 5 Shaw と Southwell により得られた計算結果 (点線) と
本解法により得られた計算結果 (実線) との比較 (case A)

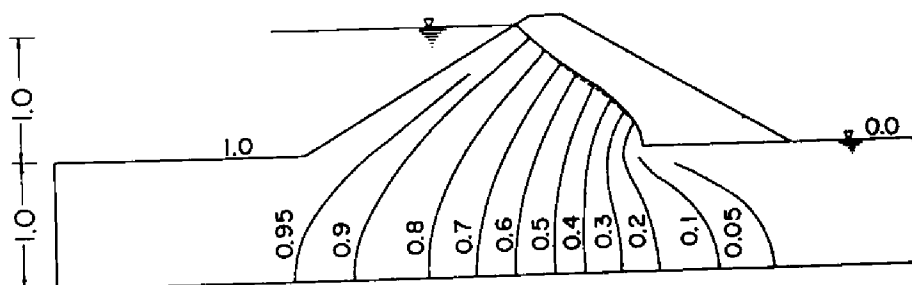


図 2. 2. 6 Shaw と Southwell により得られた計算結果 (点線) と
本解法により得られた計算結果 (実線) との比較 (case B)

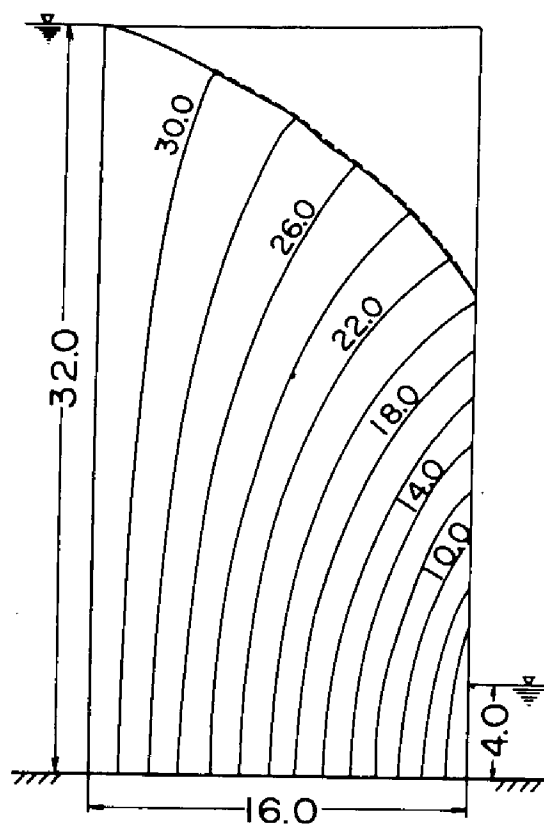


図 2.2.7 Herbert と Rushton により得られた計算結果 (点線) と本解法で得られた計算結果 (実線) との比較 (case C)

表 2.2.1 自由水面形の本理論解と既存解との差 (E_s 値)

	H_0	H_l	$\Delta x = \Delta y$	E_s	$\frac{E_s}{H_0 - H_l}$
Case A	24.0	4.0	1.0	0.18	0.009
Case B	1.0	0.0	0.125	0.01	0.010
Case C	32.0	4.0	1.0	0.19	0.006

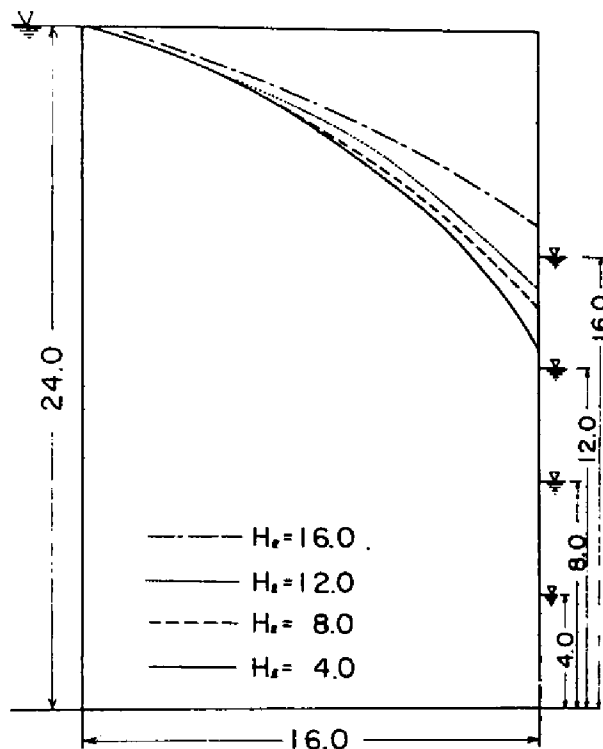
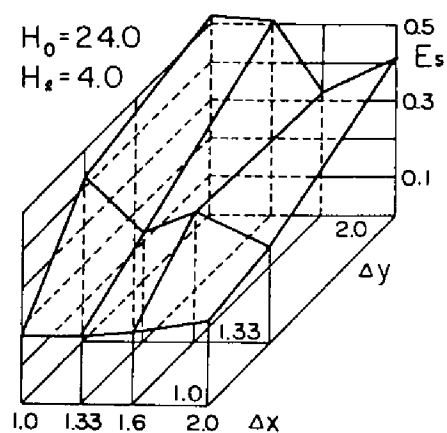


図 2.2.8 下流側水位条件と自由水面形

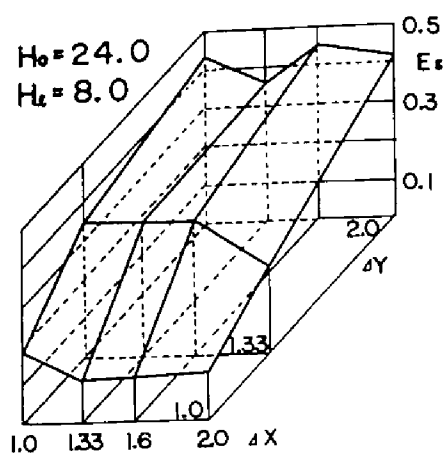
いま各 H_r について、格子間隔を $\Delta x = 1.0, 1.33, 1.6, 2.0$, $\Delta y = 1.0, 1.33, 2.0$ にとり Δx と Δy の組み合わせを変えて計算した結果を用いて得られる E_s と格子点間隔 $\Delta x, \Delta y$ の関係を図 2.2.9 (a)~(d) に示す。なお図 2.2.8 に示す H_r を変えた場合の自由水面形は $H_r = 4.0$ の場合は S. S. 解であり、他の場合はこれらの計算で最も精度が良いと思われる解を平滑化したものである。なお、ここでは、とりあえず図 2.2.8 に示す自由水面を最適解とする。

図 2.2.9(a) すなわち $H_0 = 24.0$, $H_r = 4.0$ の場合を例にとると、系の全水頭差を 20 分割して得られる正方形格子を用いて全水頭差の 1% ($E_s = 0.18$)、また 10 分割して得られる正方形格子を用いて 2% の精度で自由水面が決定されることが認められる。また図 2.2.9 (a) ~ (d) より、 y 軸の細分化が計算精度に与える影響はきわめて大であるが、 x 軸の細分化はそれほど影響を与えず、 Δy との組み合わせによっては Δx を Δy より若干大きく取った方が精度はよくなっているのが認められる。すなわち格子形状の取り方を変えることにより計算結果を損わず計算量の軽減を計ることができる。

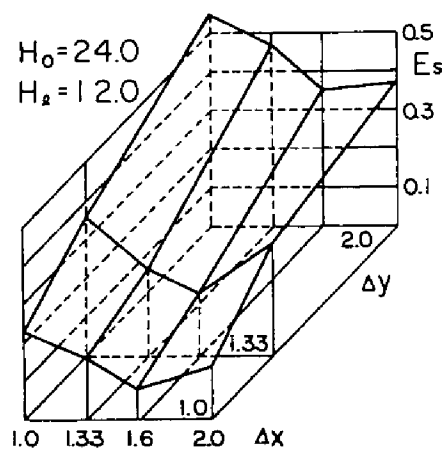
この点をより詳しく検討するため、(2.2.17) 式で、巨視的に見た動水勾配 I 、すなわち自



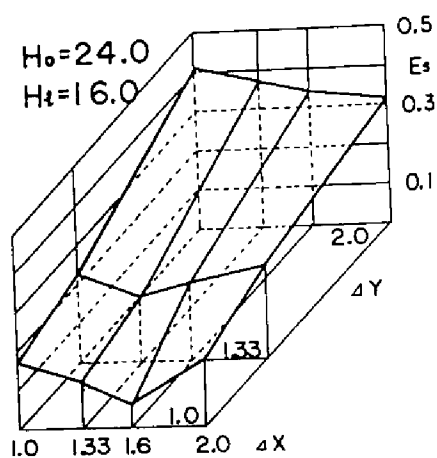
(a)



(b)



(c)



(d)

図 2.2.9 E_s と格子点間隔 (Δx , Δy) との関係

由水面形の傾度を定義し、格子形状を表わすparameterとして $\Delta y / \Delta x$ を取り、図 2.2.8 に
おける各 case の $\Delta y = 1.0$ を用いた計算結果より得られる E_s について整理したものが図 2.2.
10である。

$$I = \frac{H_0 - H_f}{b} \quad \text{--- (2.2.17)}$$

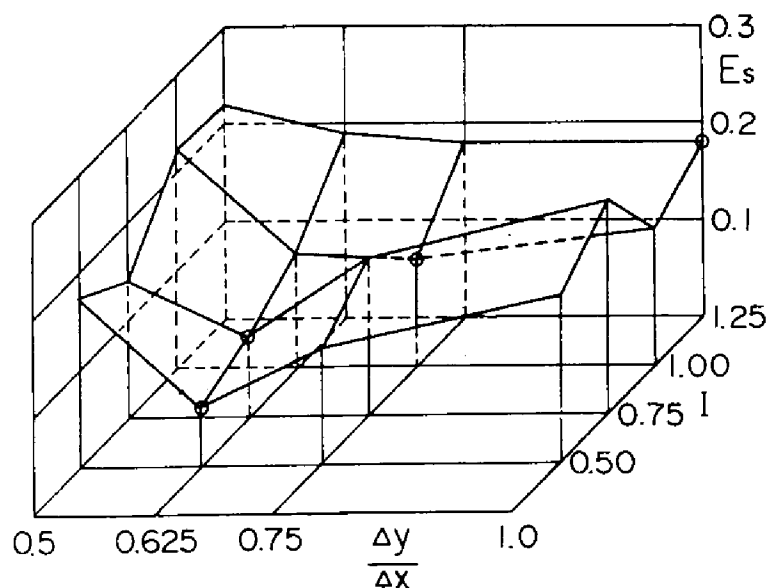


図 2.2.10 E_s と自由水面傾度 I および格子形状 $\Delta y / \Delta x$ との関係

図 2.2.10 より E_s の最小値を生ずる $\Delta y / \Delta x$ の値は I により変化し、各 I についてみれば
 $I = 0.5$ の場合を除いて $\Delta y / \Delta x$ の値が I の値より若干小さめのところに E_s の最小値を見出
すことができる。ここで定義した I は浸出面が存在するため真の自由水面の傾度ではないことを
考慮すると自由水面の傾度と格子形状の $\Delta y / \Delta x$ がほぼ一致する付近にこの計算における最適
格子形状が存在するようである。しかし解析当初、自由水面の位置・形状は未知、したがって真
の自由水面の傾度も未知であるため、とりあえず I に等しく $\Delta y / \Delta x$ を取り計算を進めればか
なり計算量が軽減されることが期待される。なお水頭分布については、 Δx 、 Δy に関係なく格
子間隔を小さく取ればそれだけ精度は向上する。

これらは限られた系についての計算結果から得られたものであり、一般的傾向を論ずるには問題はあるが、得られる計算結果の精度および計算量軽減のため取りうる方向を示す目安となる。

3.3 収束過程と加速係数

解析領域内の水頭分布の計算に用いられる加速係数は、収束速度にかなり影響をおよぼすため、計算量軽減上重要な要素の一つである。二次元系における加速係数の特性はかなり明らかにされているが、三次元系の加速係数については未知の点が多い。この問題では解析領域が計算途中変形するため問題を複雑にしているが、ここでは図 2.2.1.1 に示す三次元領域を解析領域に選び、以下加速係数について若干の考察を進める。

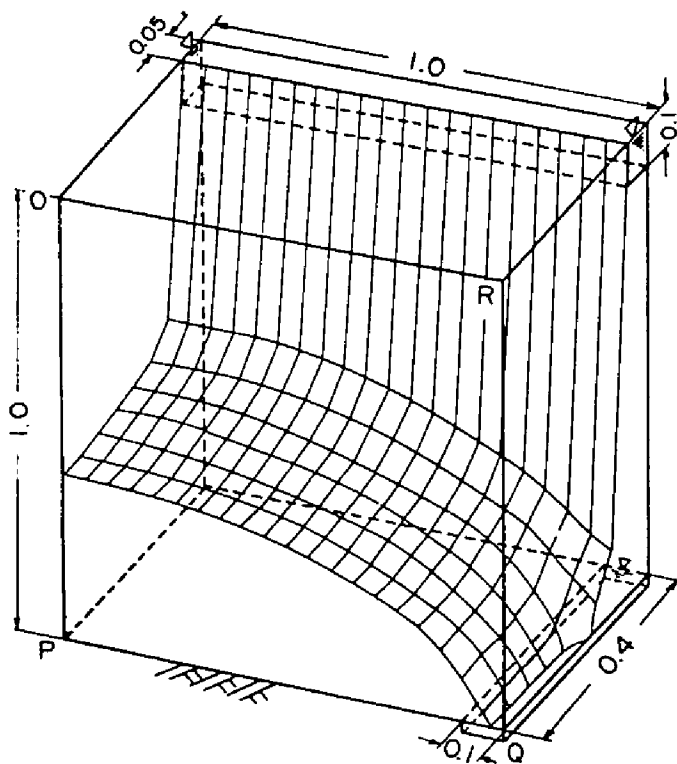


図 2.2.1.1 三次元浸透流の解析例

側面と底面は不透面で囲まれており、上面の一部の水路から水供給があり、下面の一部から排水されている図 2.2.1.1 に示される三次元系を間隔 0.05 の立体格子で分割し、透水係数 (k_x ,

k_y 、 k_z とも)に0.025, 加速係数 w に1.5, 水頭の収束判定値 ϵ に0.1を用い, 自由水面形の初期推定値を上面に仮定し, 各格子点に初期推定値として0.25を与え, 自由水面を23回修正することにより得られた結果を同図に示す。なお, この計算では計算量を軽減するため自由水面形の近似度が低い間は, 高精度の水頭分布を必要としないという観点により, 自由水面形の修正計数(M または $KCOUNT$)とその段階での緩和計算の繰り返し回数(N_M)の関係を(2.2.18)式により決定した。

$$N_M = N_{M-1} + 2 \quad \cdots (2.2.18)$$

この計算では $N_{M=0} = 2$ を採用した。しかし N_M に達する以前でも(2.2.13)式が成立すれば水頭分布は収束したとみなせるため緩和計算を中止した。

この計算過程における自由水面形の収束状況の一例を図2.2.12に示す。これは図2.2.11のOPQR断面に例を取ったものである。また図2.2.13にはこの数値計算における緩和計算の繰り返し数 N と全格子点についての一回の緩和計算の修正量の絶対値の総和(ER)との関係を示す。

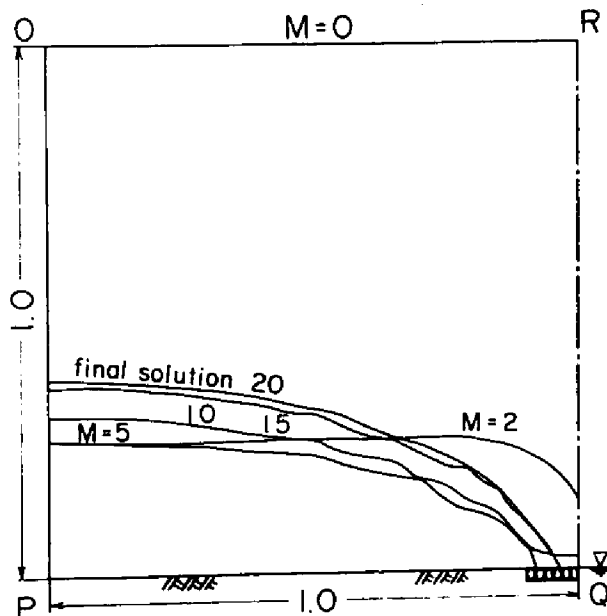


図 2.2.12 断面OPQRにおける自由水面形の収束過程

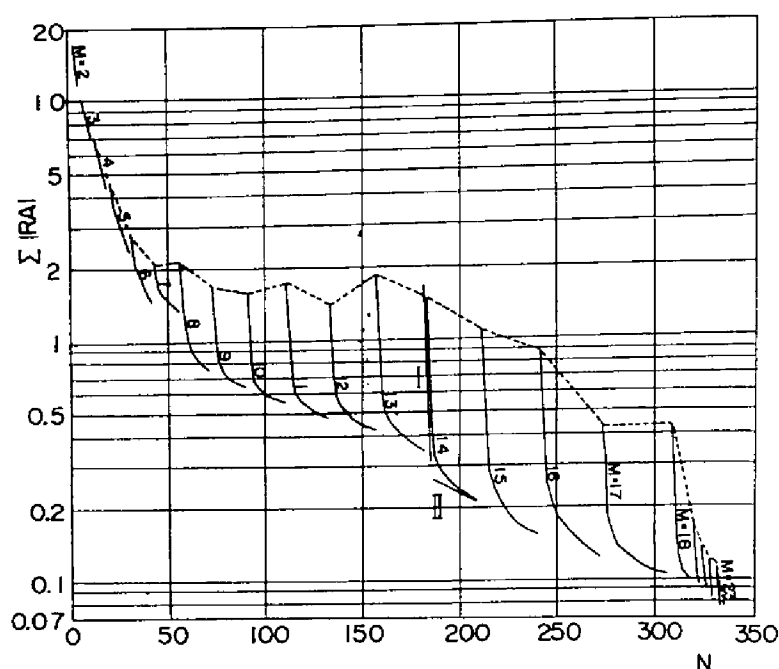


図 2. 2. 1. 3 緩和計算回数Nと修正量の緩和 $\Sigma |RA|$ との関係
($w = 1.5$)

両図を対比することによりこの解析の収束過程を概観することができる。すなわち、図 2. 2. 12 において自由水面の修正計数が増加するにつれ、その修正量が減少し、また図 2. 2. 1. 3 において水頭分布が収束していく過程が認められる。これについてもう少し詳細に検討すると次のようである。

まず、図 2. 2. 1. 2 において、 $M=0$ から $M=2$ へと自由水面形の位置は急激に変化しているが、これは水頭分布がほとんど修正されないうまま自由水面形を修正したため、各格子点に与えた水頭の初期値の性格がそのまま現われたためと考えられる。その後、少しずつ修正が加えられ、修正計数が 20 に達した後は、この断面では自由水面形の修正は必要としなかった。図 2. 2. 1. 3 には、各自由水面形の修正段階の N と ER との関係が示されている。

同図に自由水面修正直後の緩和計算における ER の値を、各自由水面修正ごとに破線で結んで示してあるが、これは自由水面形の収束状況を示す目安となる。すなわち、自由水面形に大きな修正を必要とした際には領域が大きく変化し、水頭値に誤差が含まれるため、新段階の緩和計算における修正量が増加し、結局 ER が一時的に増加する。これは自由水面の未収束性を示すことを意味

する。逆にたとえば $M=2.3$ では自由水面の修正を必要としなくなったため、前段階から領域は変化せず、 $M=2.3$ での緩和計算における ER は前段のものより当然小さく（図 2.2.1.3 の場合 $\epsilon=0.1$ 以下）、この段階で自由水面、水頭分布共に収束したものとみなせる。

いま、 $M=1.4$ の N と ER との関係に注目すれば、領域内の水頭分布の収束状況は収束速度により同図の I と II で示される二段階に分けることができる。第 I 段階は、おもに自由水面が修正された直後の自由水面付近の水頭分布の乱れを大まかに修正する段階であり、急激に収束する傾向にあり、第 II 段階は全領域の水頭値を補正していく段階である。加速係数はこの第 II 段階の収束速度に主に関与しているものと考えられ、この収束速度を大にするよう加速係数を定めることが望まれる。ただ、二次元領域における加速係数についてはこれまで多くの研究があり、かなりその特性が明らかであり、正方形領域については最適加速係数が理論的に決定される段階にいたっているが、三次元系についてはあまり研究が進められておらず残されている問題は少なくないようである。

そこで、まず三次元領域における加速係数がどのような特性を有しているかを知るため、図 2.2.1.1 に示す全領域について自由水面を考慮することなく計算を行ない、 N と ER との関係を加速係数が 1.9, 1.8, 1.7, 1.5, 1.4, 1.2 について求めた結果を図 2.2.1.4 に図示する。十分予想されることであるが $w=2.0$ を用いた計算では、 $N \sim ER$ は振動現象を呈し、収束の方向に向わなかった。これらの結果よりこの全領域の最適加速係数は 1.8～2.0 にあり、1.9 に近いものと思われる。図 2.2.1.4 から三次元領域における加速係数の役割を概観することができるが、二次元系のそれと一般的な特性に差はないと言えよう。

次に自由水面の修正を行なう場合の最適加速係数を検討するため、図 2.2.1.1 の解を得たと同じ条件で、加速係数に 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.4 を用いて計算を行ない、それぞれの加速係数について N と $ER = \sum |RA|$ の関係を図 2.2.1.5(a)～(e) に図示する。

また図 2.2.1.6 には自由水面形の収束速度の目安とするため、図 2.2.1.3 に示す破線と同じものを各加速係数について示す。

図 2.2.1.4, 図 2.2.1.5(a)～(e) および図 2.2.1.3 を対比すると、自由水面の修正による解析領域の変形にともない若干の差はあるが、図 2.2.1.3 および図 2.2.1.5 に示す第 II 段階の収束速度と図 2.2.1.4 に示す収束速度とほぼ一致していることが見出せる。しかし、前述のように図 2.2.1.1 に示す全領域についての最適加速係数はほぼ 1.9 とみなせたが、自由水面を考慮した場合 $w=1.9, 1.8$ を用いた解析では、図 2.2.1.5・(d), (e) に示すように水頭値の収束ははやいようであるが、図 2.2.1.6 に示すように自由水面形は収束の方向に向わなかった。

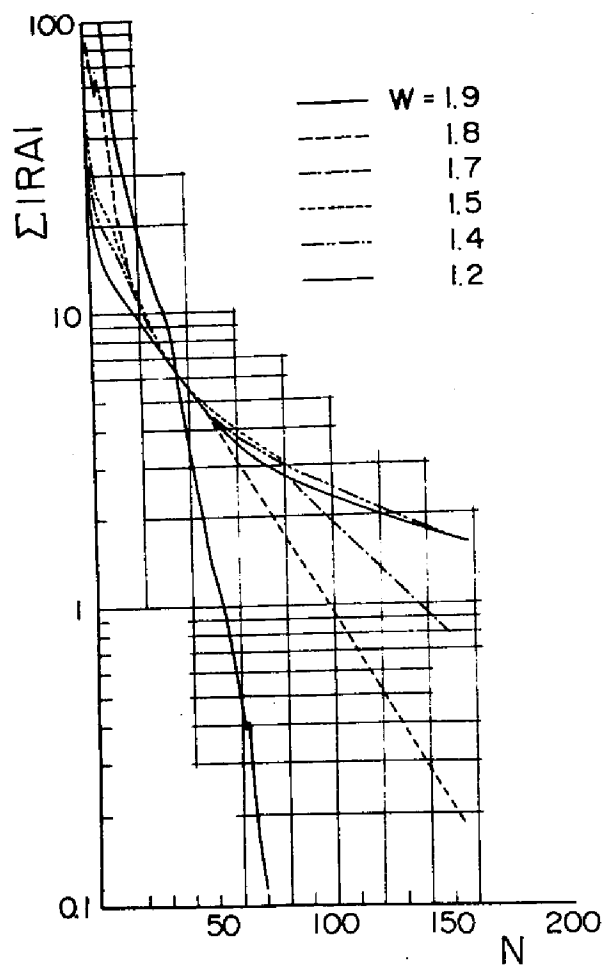
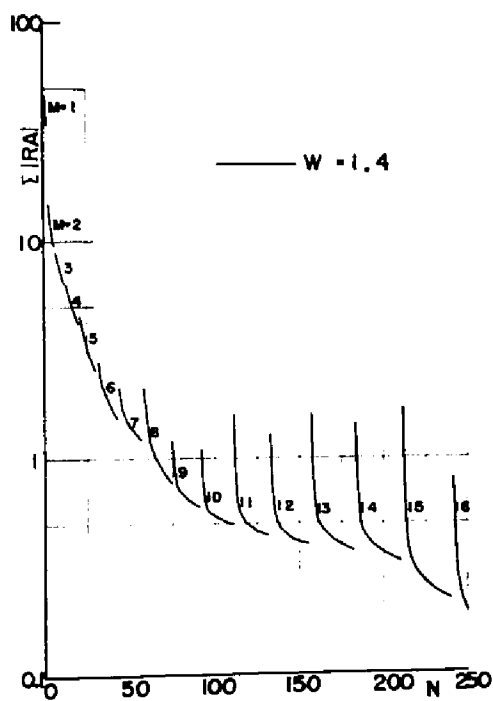


図 2.2.1.4 自由水面を考慮しない場合の緩和計算に
おける N と $ER = \sum |RA|$ との関係

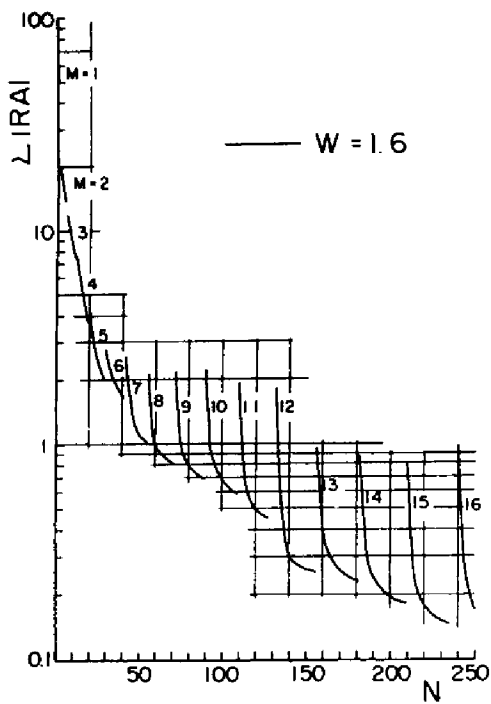
これらの結果を総合的に検討すると、図 2.2.15 では第Ⅱ段階の収束速度は図 2.2.14 のそれにはほぼ等しいが、図 2.2.14 に示す最適加速係数とみなせる $w = 1.9$ は必ずしもこの問題の最適加速係数とは言えない。これは自由水面形付近の水頭値の乱れの修正が過大であるため自由水面の位置が定まらぬためであると考えられる。図 2.2.16 より、この問題では図 2.2.14 の最適加速係数より若干小さく 1.7 程度のものが最適のようである。

図 2.2.16 に示すように w に 1.7~1.4 を用いた計算では、 $N \sim \sum RA$ の関係に顕著な差は認められず、また解析領域によって加速係数と収束速度との関係は異なるため、これだけの論議では十分とはいえないが、この解析において加速係数の収束への役割がかなり明らかになったと考えられる。

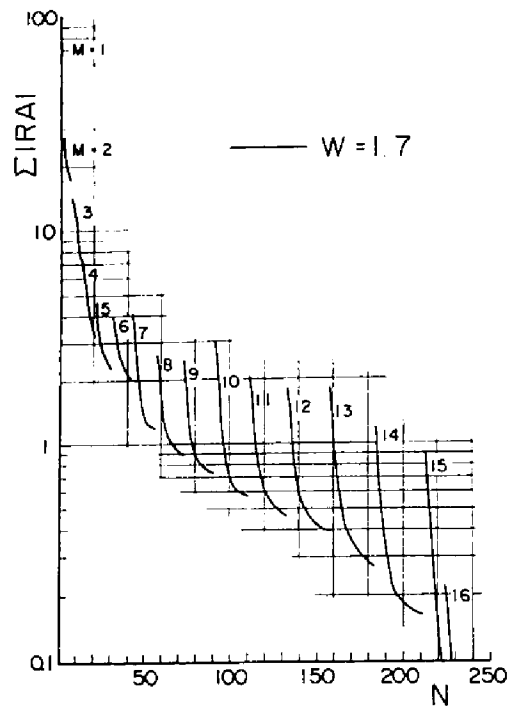


(a)

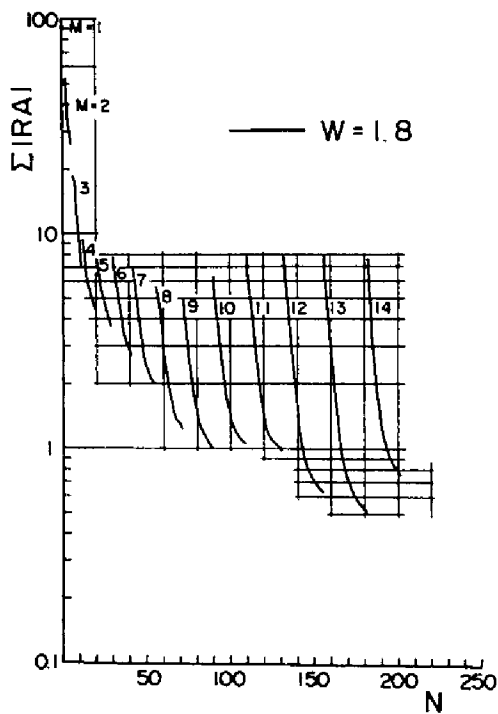
図 2.2.15 N と $\sum |RA|$ との関係



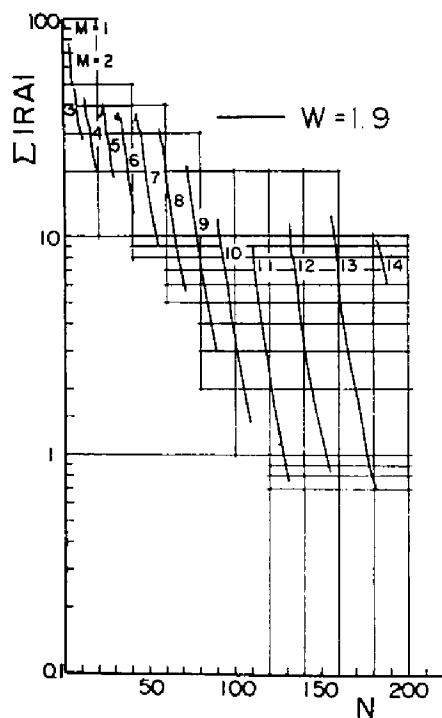
(b)



(c)



(d)



(e)

図 2.2.1.5 N と $\Sigma |RA|$ との関係

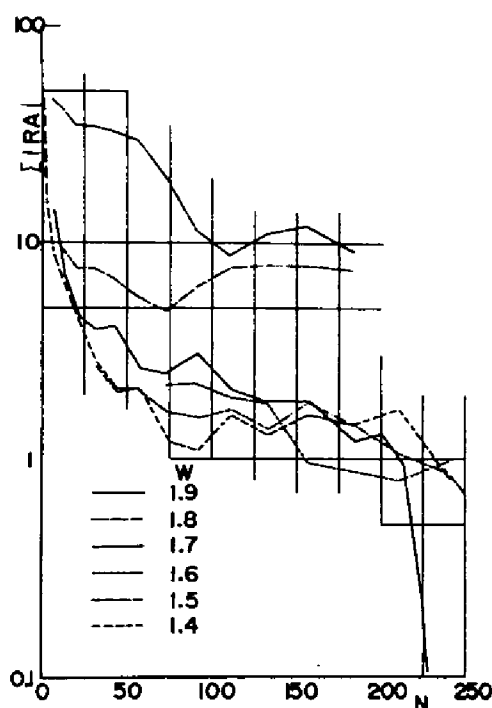


図 2.2.16 加速係数と自由水面形の収束速度

参 考 文 献

- 1) たとえば, Young, R. N. and B. P. Warkentin : Introduction to Soil Behavior, p. 359, Macmillan, 1966.
- 2) Shaw, F. S. and R. V. Southwell : Relaxation Method Applied to Engineering Problems, VII, Proc. Roy. Soc. (A) vol. 179, pp. 1~17, 1941.
- 3) 山内, 森口, 一松 : 電子計算機のための数値計算法(I) pp. 175~199, 培風館, 昭40.
- 4) 前出の文献2)
- 5) Herbert, R. and K. R. Rushton : Ground-water Flow Studies by Resistance Network, Géotechnique, vol. 16, pp. 53~75, 1966.
- 6) Finnemore, E. J. and B. Perry : Seepage through an Earth Dam Computed by the Relaxation Technique, Water Resources Research, vol. 4, pp. 1059~1067, 1968.
- 7) たとえば清野 武 : 電子計算機によるラプラスの方程式の解法—特に加速係数の推定について—KDC-1レポート, 昭37.

第3章 アースダム三次元浸透流の解析結果とその考察

第2章において自由水面を有する三次元浸透流の数値解法を提示し、その計算精度と計算量軽減のための若干の検討を行なった。その結果この解法の有用性が十分認められたので、本章ではこれまであまり検討されていないアースダムの三次元浸透流について解析を行ない考察を加える。

アースダム中の浸透流については、ダムサイトごとに問題が提起され、処理されるべき問題が多いようである。その上、ここで提示した解法が数値計算法であるため一般的論議は行ないにくい。アースダム浸透流の三次元特性がほとんど解明されていない現状では具体的な代表系を取りあげて論議を行なってもそれなりの意味はあると考えられる。

そこで本章では二三の代表系について解析を行ない、アースダム三次元浸透流の三次元的特性およびアバットメント形状の三次元的地形効果およびその影響範囲について考察を加える。

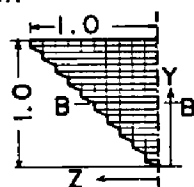
第1節 V字谷に設置されたアースダム浸透流の三次元的特性

1.1 drain のないアースダムの浸透流

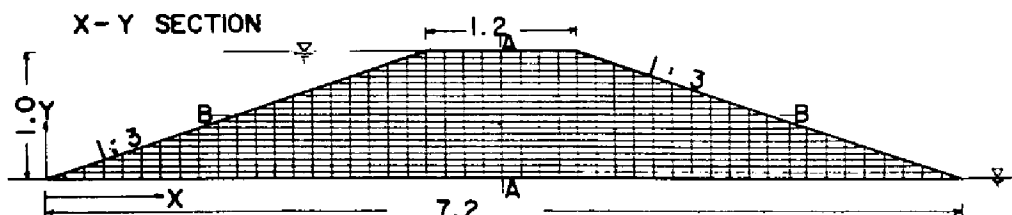
ここでは具体的な解析領域として図2.3.1に示す系を採用する。図2.3.1(a)には標準断面、図2.3.1(b)にはアバットの形状が示してある。座標軸を同図に示すように、水平方向を x 、垂直方向を y 、ダム軸方向を z で表示し、原点を標準断面の上流端に取る。なお長さは上下水位差を用いて無次元表示することにする。

ここでは図2.3.1に示す立体格子($\Delta x=0.15$, $\Delta y=0.05$, $\Delta z=0.10$)を用いて領域を分割し、解析を行なうことにする。なお三方向の透水係数に1.0、収束判定値 ε に0.4、加速係数 w に1.8を採用する。自由水面をはじめ天端に一致するものと仮定し、これを15回修正

Y-Z SECTION



(b)



(a)

図 2.3.1 解析領域

して得た計算結果を自由水面形について図 2.3.2 に三次元表示する。

図 2.3.3 に z 方向の各 $x-y$ 断面の水頭分布と自由水面形を示す。

図 2.3.4 に、図 2.3.1 に示されている AA 断面および BB 断面の水頭分布、および図 2.3.5 に ΔL の標準断面の自由水面形と水頭分布を二次元解析の結果とあわせ示す。なお Casagrande の方法による基本放物線を併示する。

図 2.3.2 と図 2.3.3 に示すように、各断面の水面形は標準断面のそれと大差なく、 ΔL 軸方向の変化は小さい。二次元流とした場合の計算結果と比較すると、両計算結果との差はかなりあり、自由水面形はほぼ 0.05、すなわち上下水位差の約 5% の上昇が認められる。また水頭分布は二次元流の場合と比較して等水頭線が垂直に近くなっているのが認められる。

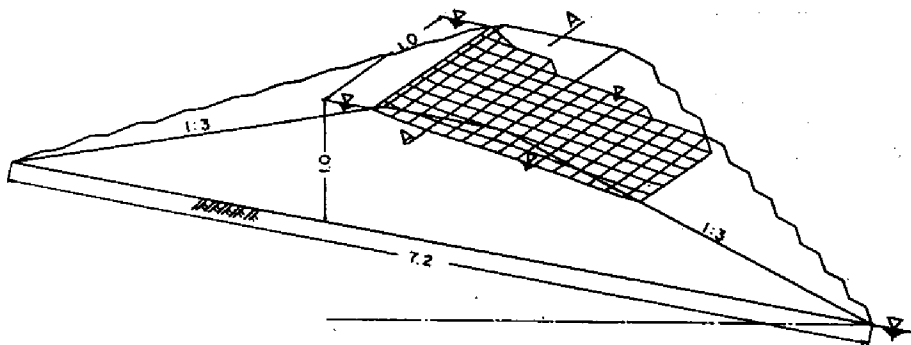


図 2.3.2 自由水面形の三次元表示

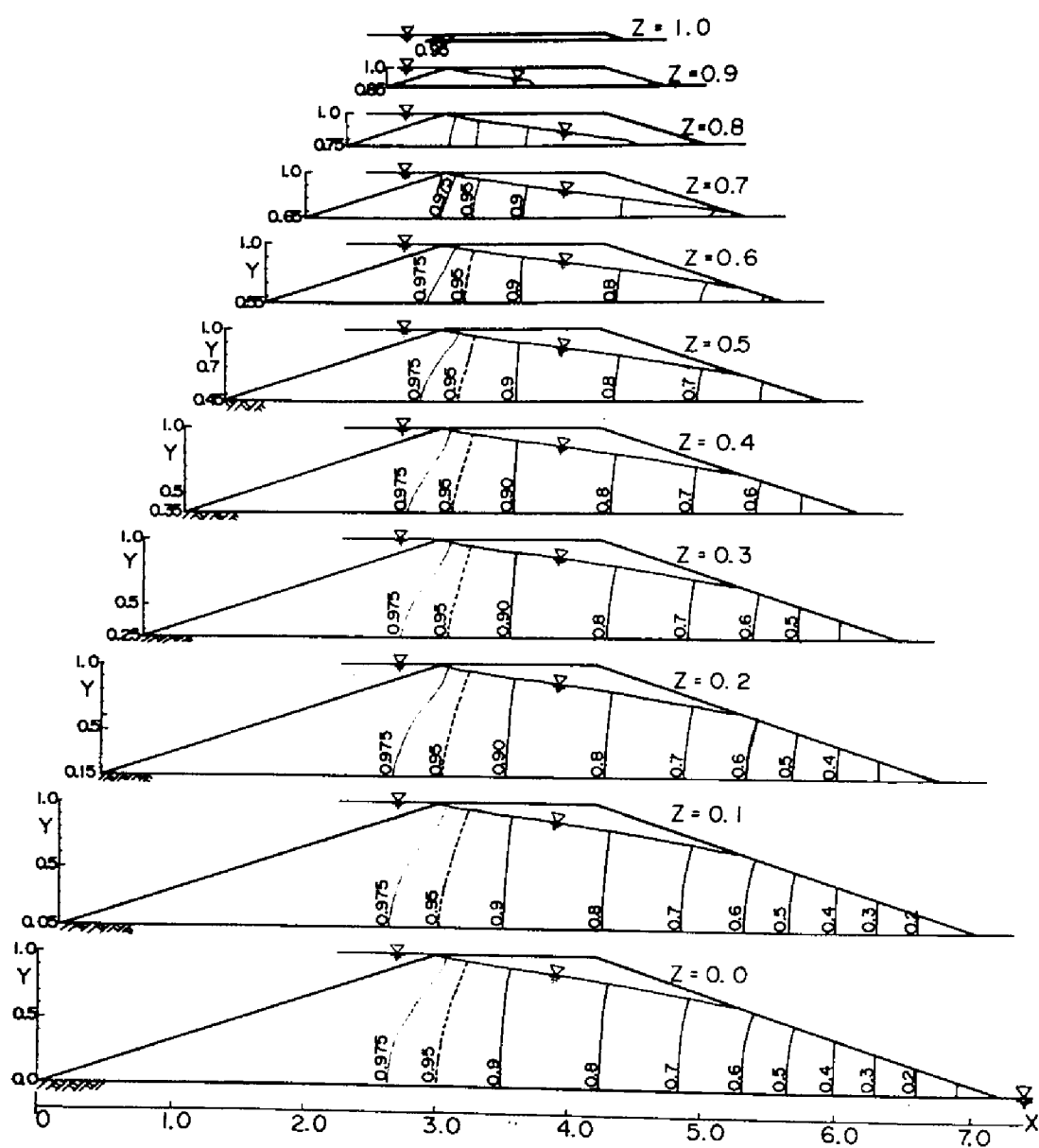


図 2. 3. 3 各断面における自由水面と水頭分布

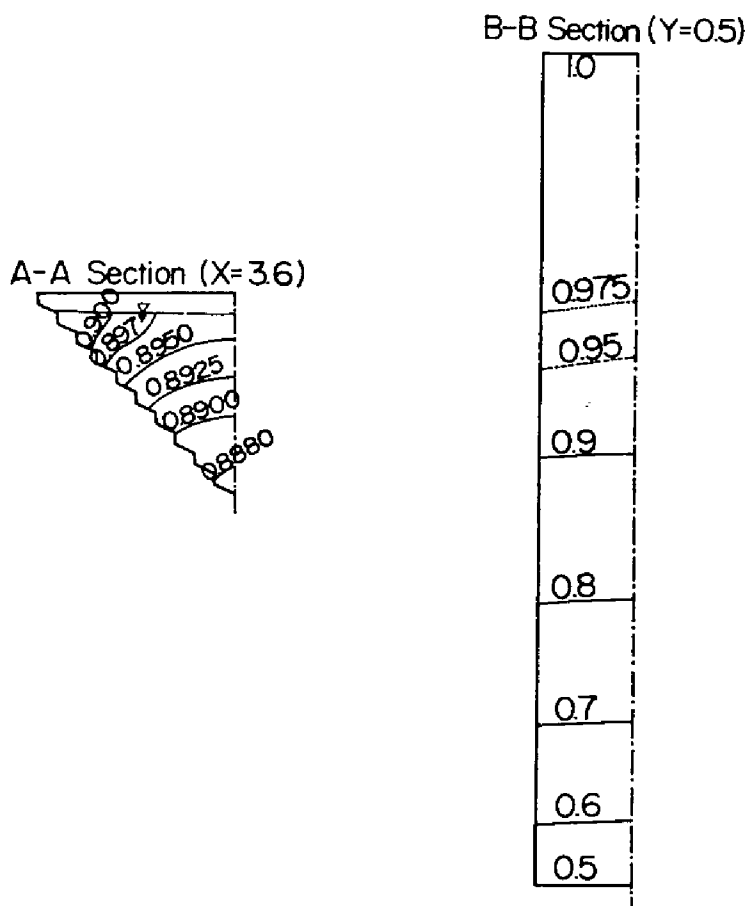


図 2.3.4 A A断面とB B断面の水頭分布

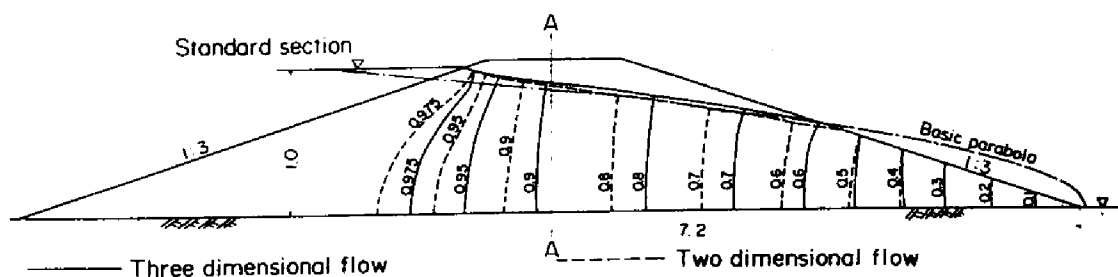


図 2.3.5 標準断面における自由水面形と水頭分布

1.2 水平な drain を有するアースダム の浸透流

図 2.3.1 に示す系において、図 2.3.6 に示すように長さ 1.95 の水平な drain を設置した場合を対象とし前節に用いたものと同じ計算条件を適用して計算を行なう。この計算結果を自由水面形について図 2.3.6 に三次元表示する。また同図に示す AA 断面と標準断面における自由水面形と水頭分布を図 2.3.7 に示す。なお標準断面については二次元流とした場合の計算結果を図 2.3.7 に併示する。

図 2.3.6 ～ 2.3.7 に示すように、水平な drain を設置すると、巨視的動水勾配は大きく、drain 付近で水頭のかかりの集中が認められ、AA 断面の地山付近の自由水面は標準断面のそれより約 0.02 ほど高い。標準断面について二次元流とした場合の計算結果と比較すると、場所により異なるが自由水面の位置は 0.1 ～ 0.15 程度高くなっているのが認められ、水頭分布についてはかなりの差が現われている。

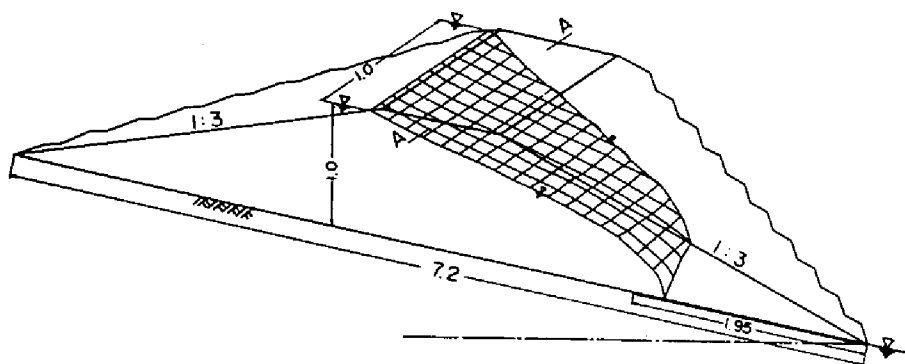


図 2.3.6 自由水面形の三次元表示

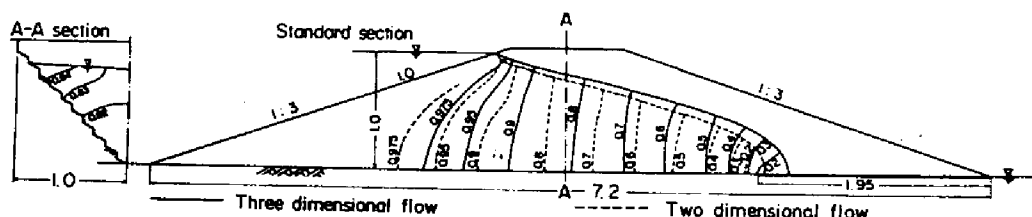


図 2.3.7 標準断面と AA 断面における自由水面形と水頭分布

1.3 考察

V字谷に設置したアースダム^①の浸透流について、drainを設置しない場合と設置した場合について計算を行なった。

程度の差はあるが、これらの計算結果より共通した三次元的特性として、自由水面の位置は二次元流とした場合のそれよりかなり高いが、ダム軸方向（ x 方向）への傾斜はそれほど大きくなく、また水頭分布について見ると二次元流の場合より全体的に等水頭面は浸出面側に寄っていることが判明した。これらは、標準断面において二次元流とした場合には x 方向の流れ成分を無視しているのに対して、三次元系の場合には x 方向の流れ成分があり浸透流量が増加しその上浸出面付近では断面が減少するので、この浸透流量の増加分を流下させるために水頭の集中すなわち流速の増加、および自由水面の上昇による流積の増加が生ずることに起因する現象であると考えられる。

次に両計算結果を対比し、三次元的効果の現われ方について考察を加える。ここでは前述のような二次元流とした場合の計算結果と三次元流とした場合の計算結果との差を三次元的効果と呼ぶことにする。

drainを設置しない場合には、下流側法面上に浸出面が現われ、巨視的な動水勾配も小さく、浸出面の面積も広いためこの付近の水頭の集中はそれほど大きくない。一方図2.3.6～2.3.7に示すようにdrainを設置した場合には、巨視的な動水勾配はかなり大きくなり、drain付近では極端な流積減少のため水頭のかかなりの集中が認められる。すなわち、巨視的な動水勾配が大で、下流で流れが集まるような系においては、所定の浸透流量を流下させることが必要なため、二次元流とした場合に比べ自由水面の上昇、等水頭面の浸出面方向への移動、 x 方向の流速成分の増大、および x 方向への自由水面の傾きなどが強く現われる。浸透流量はdrainを設置した場合は設置しない場合の1.6倍であった。

第2節 アバットメントがアースダムにおよぼす三次元的地形効果とその影響範囲

2.1 三次元的地形効果

アースダム浸透流においてアバットメントの形状が自由水面形および水頭分布におよぼす三次元的地形効果を検討するため図2.3.8に示す谷形状の4種の系について解析を行なった。なお標準断面は図2.3.1(b)に示すものと同一である。Case 1, 2, 4および二次元流とした場合の標準断面における自由水面形と水頭分布を

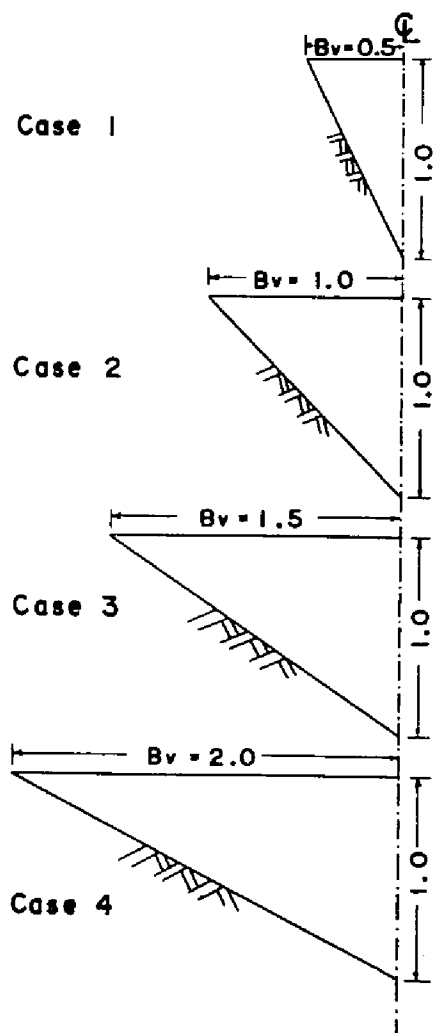


図 2.3.8 計算に用いた谷の形状

図2.3.9に示す。図2.3.9に示すAA, BB, CCのy-z断面の水頭分布を各caseについて図2.3.10に示す。各caseの標準断面における自由水面を拡大して図2.3.11に示す。最後に図2.3.12に標準断面とCC断面と交わる点における自由水面高と谷幅との関係を示す。

これらの結果を総合して考察を加えると次の事項が明らかになる。

- (1) 三次元的効果をもっとも顕著に現われるのは、case 2の場合である。すなわち図2.3.11および図2.3.12を用いて、自由水面の位置を比較すると、二次元流とした場合の自由水面からの隔りは、case 2, 3, 4, 1の順に大きくcase 2の場合の自由水面が最も高い位置にある。Case 2の場合より、アバットメントが急または緩になると自由水面は降下し、二次元流とした場合の解に近くなる。

これだけの計算では結論をつけにくいですが、アースダム浸透流におよぼすアバットメントの三次元的効果はその傾斜が45°の場合が最大のようなのである。

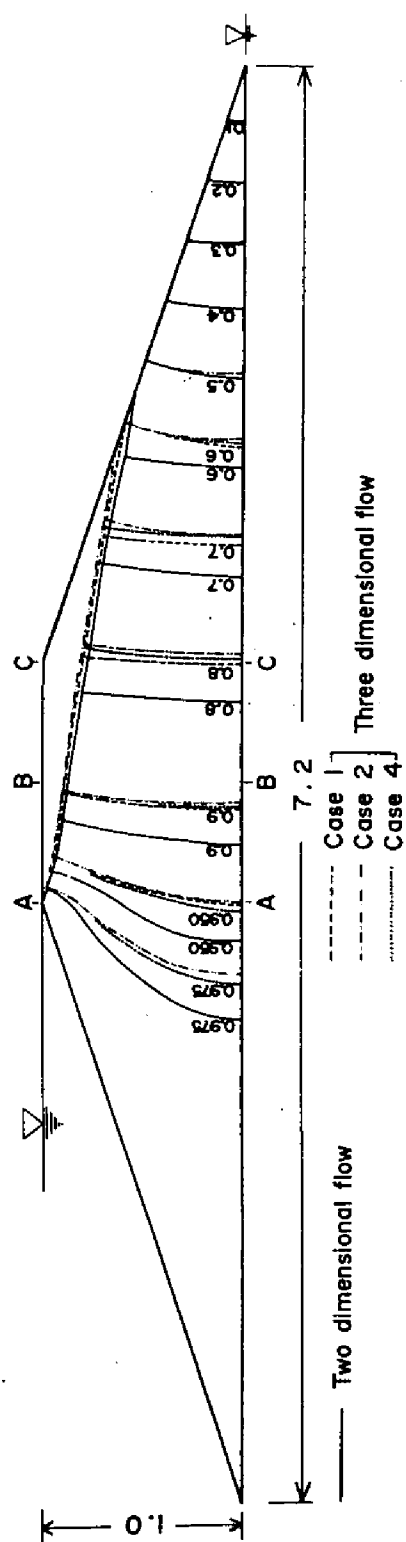


図 2. 3. 9 標準断面における自由水面形と水頭分布

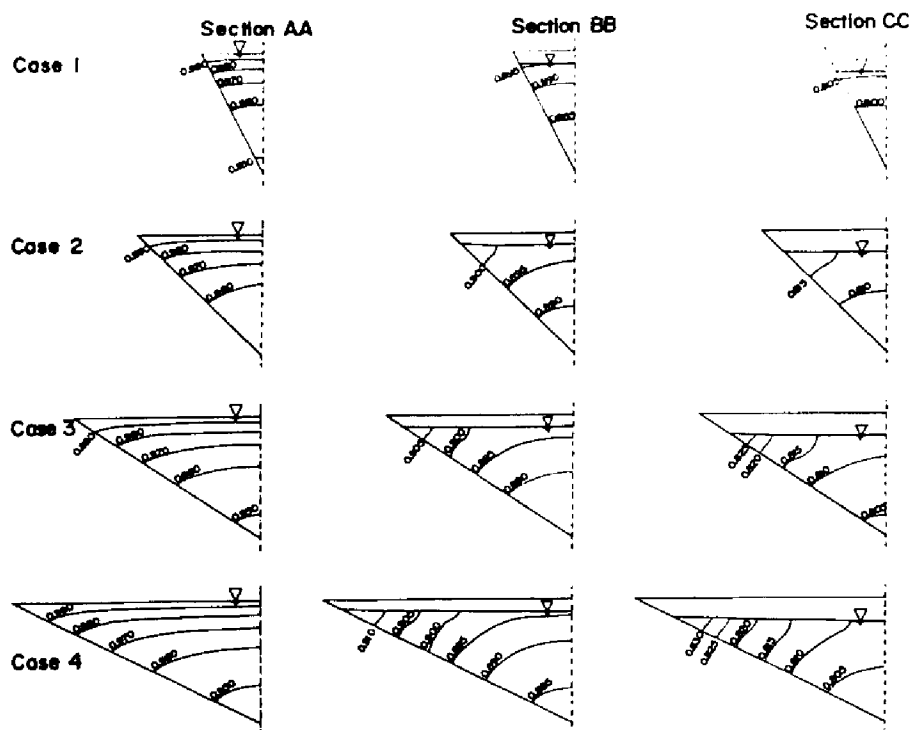


図 2.3.10 各断面における水頭分布

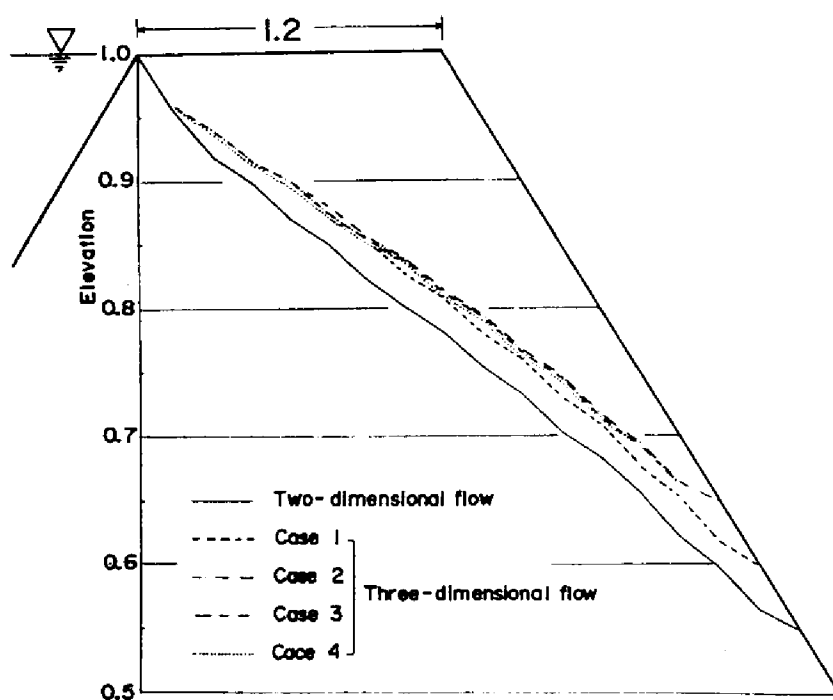


図 2.3.11 標準断面における水面形

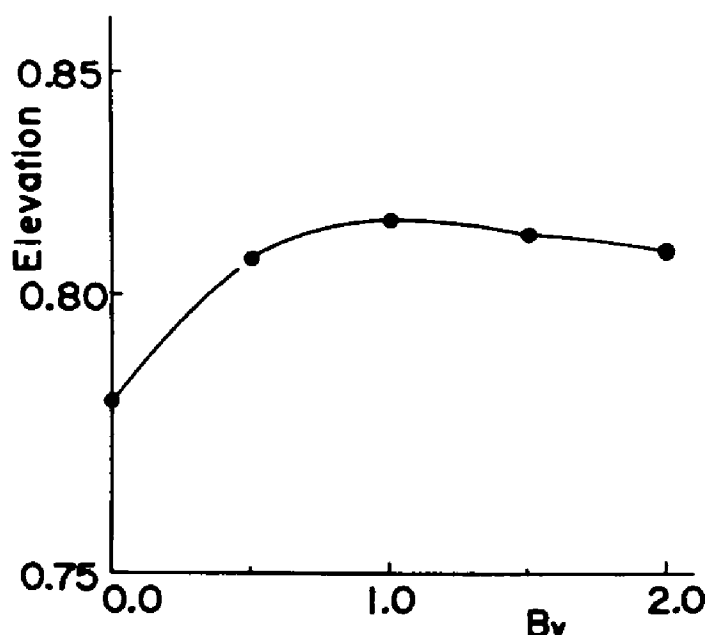


図 2.3.1.2 標準断面と CC 断面との交点における自由水面高と谷幅との関係

(2) 図 2.3.9 および図 2.3.10 を用いて各 case の水頭分布を比較検討すると、三次元的効果が大きく現われる系ほど等水頭面は浸出面側へ寄っている。すなわち浸出面付近の断面縮小に加え、 z 方向の流入による流量増分を、水頭の集中による流速増により、流下させることにより平衡が保たれている様子が認められる。

2.2 三次元的効果の影響範囲

前項に示すアバットメントの三次元的効果のおよぶ範囲について解析検討を加える。前項の計算によると図 2.3.8 に示される各 case のうち、三次元的効果が最も大きく現われるのは case 2 の系であることがわかっているので、ここではアバットメントの傾きに case 2 に相当するものを用い、谷底を水平にとり、その幅を変えて計算を行ない三次元効果の影響範囲について考察する。

まず図 2.3.1.3 に計算を行なった各 case の領域を示す。なお図 2.3.1.3(a)にはアースダムの平面図を、図 2.3.1.3(b)には谷の断面形を図示してある。これらの図中の記号は次のとおりである。AA は地山と川底の接点におけるダム軸に直交な方向 ($x-y$ 方向) の垂直断面 ($x-y$ 断面) である。BB はダムの中央断面すなわち対称断面、CC は天端中央におけるダム軸方向 (z

方向)の $y-z$ 断面, DD は天端下流端における x 軸方向 (Z 方向)の $y-z$ 断面をそれぞれ表わしている。Case I においては AA 断面と BB 断面とは一致する。なお B_r は川底の巾の $\frac{1}{2}$, B_v は天端長の $\frac{1}{2}$ を現わすものとする。

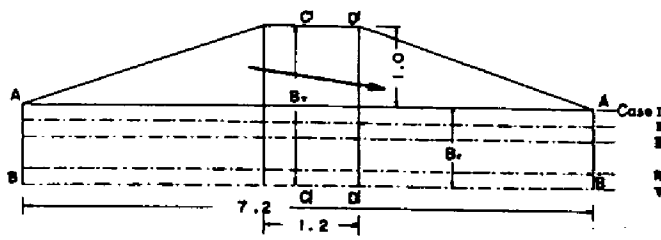
図 2.3.13 に示す各 case について計算結果をまとめると次のとおりである。

Case I, II, V の計算結果より x 軸の中央断面 (BB 断面) の自由水面形と水頭分布を二次元流とした場合の計算結果と共に図 2.3.14 に示す。各 case の CC 断面における自由水面形と水頭分布を図 2.3.15 に示す。なお case I については図 2.3.4 に示してある。各 case の BB 断面における自由水面形を拡大して図 2.3.16 に示す。図 2.3.17 には BB 断面と DD 断面の交点上の自由水面高と B_r または B_v との関係を図示する。ここで case V の自由水面高は二次元流の場合と一致している。図 2.3.18, 図 2.3.19 にはそれぞれ AA 断面と DD 断面における自由水面形をそれぞれの case について拡大して示す。

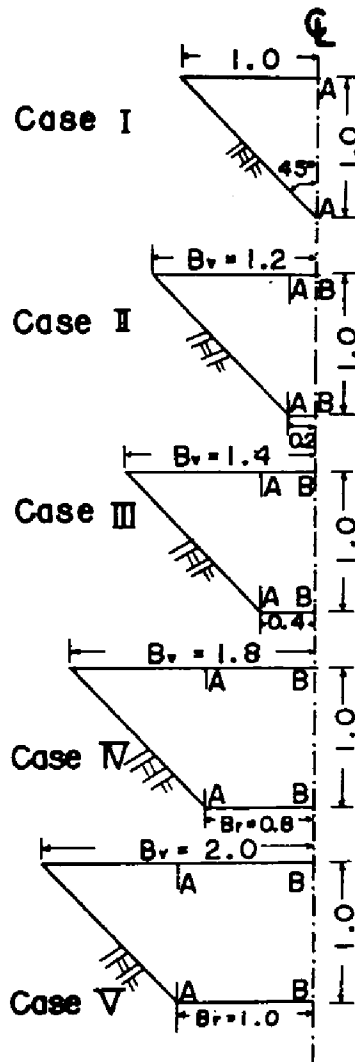
これらの計算結果を総合して考察を加えると次の事項が明らかになる。

- (1) x 軸の中央断面 (BB 断面) の自由水面形および水頭分布への地山部の影響は、十分予想されることであるが、case I, II, III, IV, V の順に現われていることが認められる。
- (2) 図 2.3.15 と図 2.3.19 より、 x 軸方向 (Z 方向) の水頭勾配および自由水面傾度は地山部では各 case とともにかなり認められるが、地山部から平坦部に移ると急に減少する。特に case V の場合には、その中央断面 (BB 断面) に地山部の影響すなわち三次元的効果は認められず、二次元流とした計算結果とほとんど等しかった。これらの事実より、この系についてののみいえることであるが、長さとしてほぼ堤高分だけ地山部 (AA 断面) から離れると、 x 軸の中央断面 (BB 断面) では地山部の影響はほとんど受けず、二次元流とした計算結果とほとんど一致する。
- (3) 各 case における水頭分布を比較すると三次元的効果が強く現われる系ほど、等水頭面は浸出面側に寄り、自由水面形は上昇する。これは前節で得た結果と一致する。

この解析法が数値計算法であるため、一般的論議を行なうためには、多くの場合について解析を行ないその積み重ねによらねばならず、ここで行なった計算では十分とはいえないが自由水面を有する三次元浸透流の特性をかなり明らかにすることができたと考えている。ただ、ここで得られた解析結果は potential flow とした場合のものであり、実際現象との一致について実験により吟味する必要がある。特に、浸出面を有する場合には、浸出面付近の流れの状態の変化および Darcy 則の適応性などが問題であり、potential flow とした場合の解については補正を必要とするようであるが、とりあえずの解決方法として Casagrande の手法にみられるような経験的手法を準用すれば良いと考えている。



(a) アースダムの平面図



(b) U字谷の形状

図 2.3.1.3 解析領域

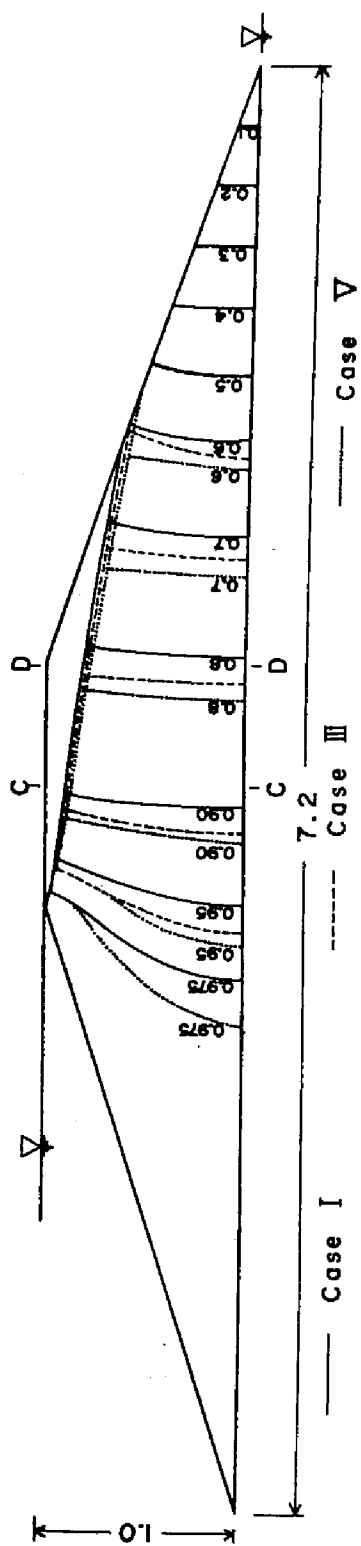


図 2. 3. 1 4 標準断面における自由水面と水頭分布

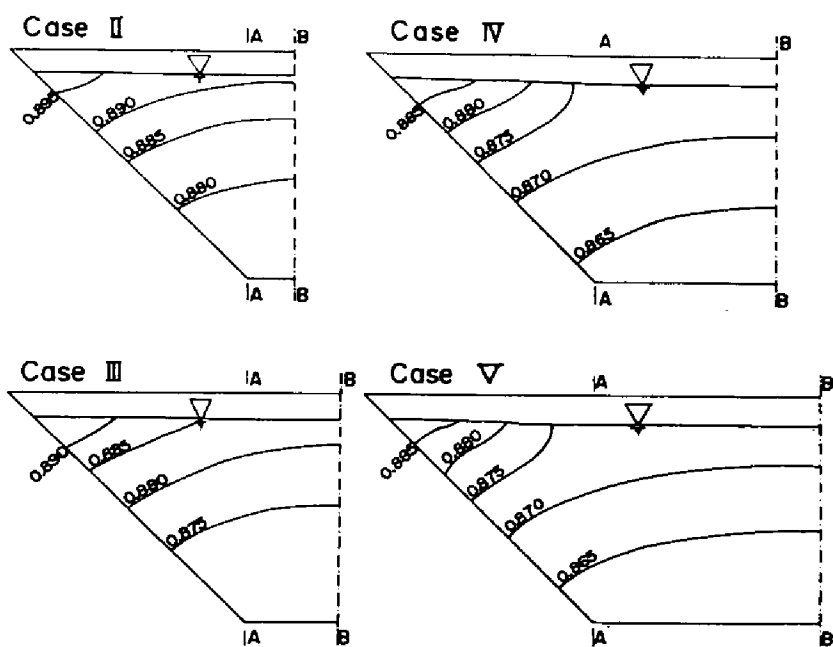


図 2. 3. 1 5 CC断面の自由水面形と水頭分布

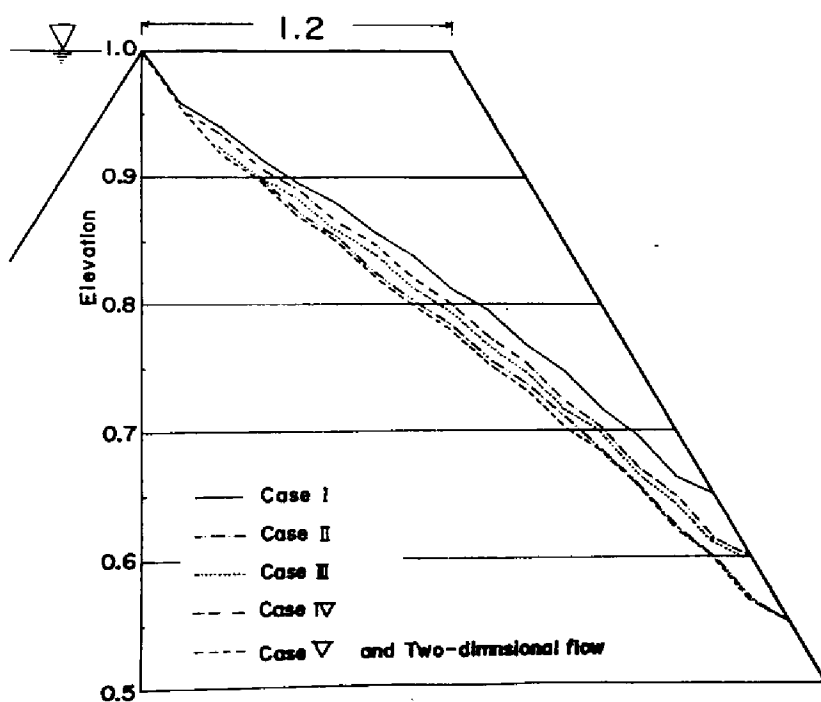


図 2. 3. 1 6 BB断面の自由水面形

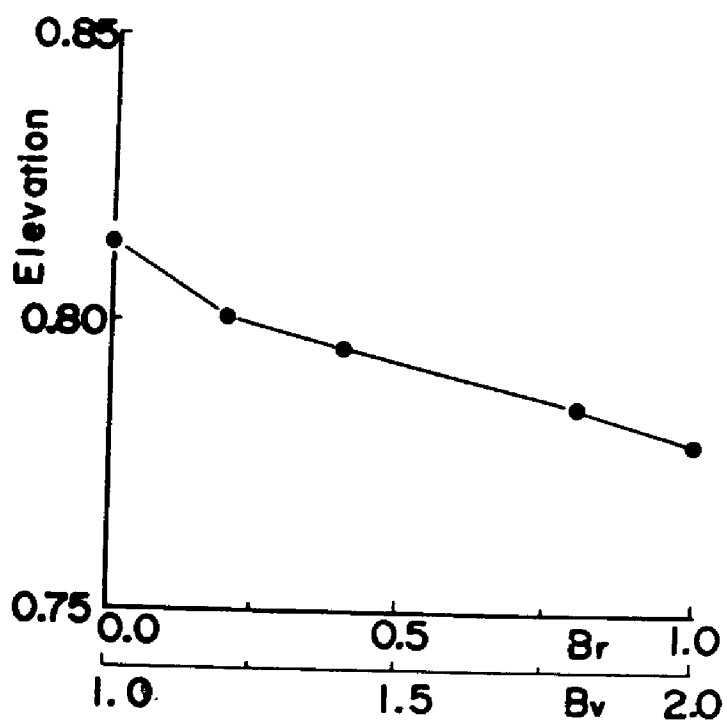


図 2.3.17 ダム中央における自由水面高と谷巾との関係

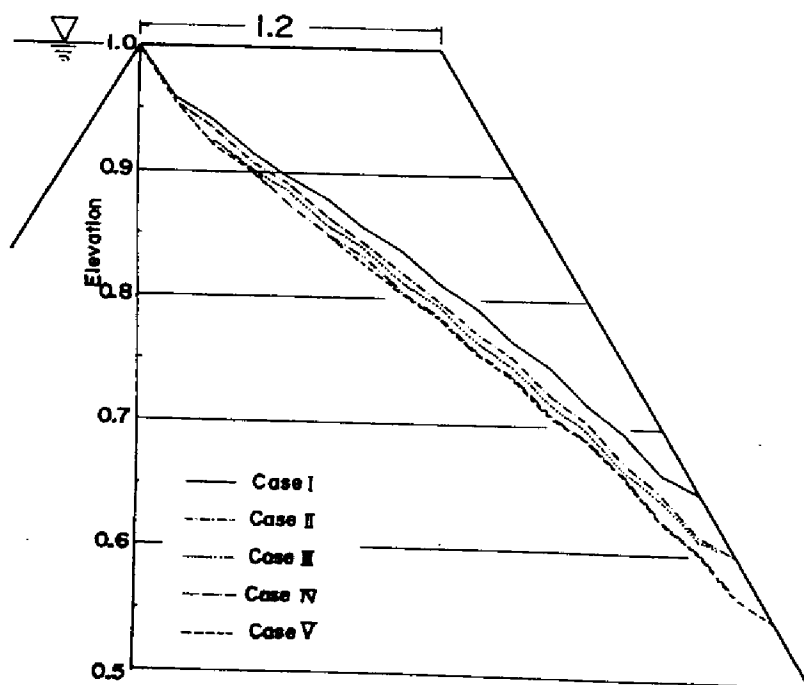


図 2.3.18 AA断面の自由水面形

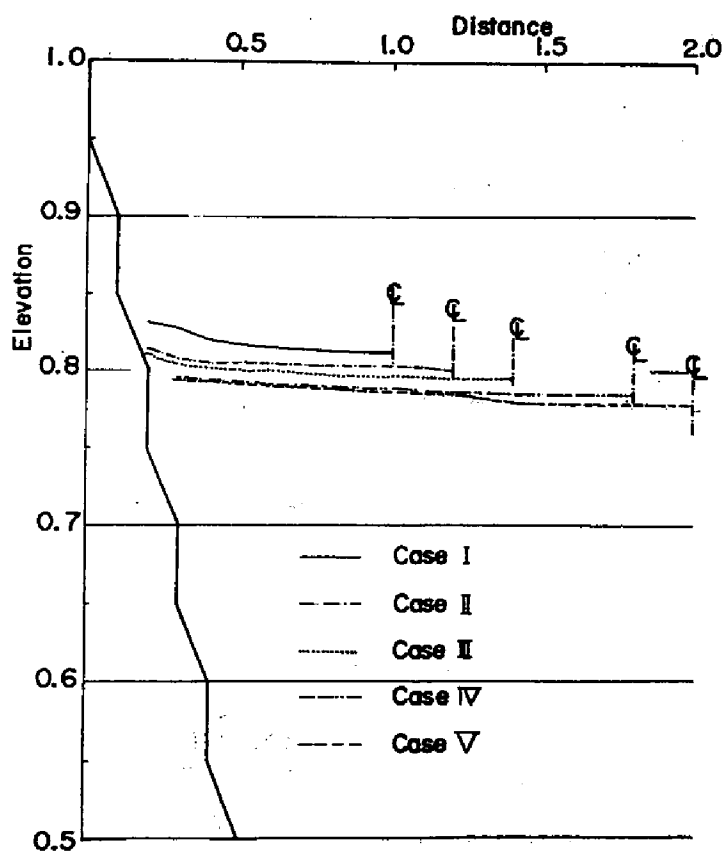


図 2.3.19 DD断面における自由水面形

第4章 広域地下水問題への適用と考察

本章においては、第2章で提示した自由水面を有する浸透流の三次元解析法の広域地下水問題への適用とその場合の問題点を実際例をとおり検討する。

第1節 対象領域の概要とそのモデル化

1.1 対象領域

研究の主対象領域は図2.4.1に示されるように、琵琶湖東北部のほぼ北緯 $35^{\circ}25'$ 、東経 $136^{\circ}15'$ に位置する田川流域の平地部のほとんど、その周辺部および琵琶湖の一部を含む領域である。ここでいう田川流域とは図2.4.1に示すように姉川、草野川、高時川および周辺山地部に囲まれ中央部に排水河川田川を擁する面積 35.4 km^2 の地域である。この地域において、われわれは昭和41年以来琵琶湖水文観測特別事業の一環として水文諸量の連続観測および周辺部を含めた地下水分布に関する調査を行なっており、地下水の平面的挙動についてはかなりのことが明らかにされている。^{1), 2), 3)} このようにこの地域の地下水はこのモデルの適用性を検討するために好都合であり、しかも琵琶湖総合開発計画に伴う琵琶湖水位変動幅の拡大がこの地域の地下水に与える影響とその対策を検討する上でも実用上興味ある地域であるので、この地域を研究対象領域に選んだ。

ここで広域地下水問題を解析しようとする場合、解析領域の決め方が重要な問題となる。すなわち、図2.4.1の場合について考えてみると、平地部と山地部との境界は明らかであるが平地部については解析領域をどの部分までとするか判断する材料がない。また計算量の点から解析領域の大きさには自ら制限があるので、ここでは地下水分布の実測結果を検討し、なるべく妥当と思える境界と条件を選ぶことにした。

この解析では、はじめ図2.4.2に示す領域ABCDについて解析を行なったがその結果はおもわしくなかったので、次に領域AB'C'Dについて解析を進めた。

1.2 地形

この領域は地形的には琵琶湖、平地部および山地部に大別され、山地部と平地部の境界はその地形勾配上かなり判然としている。なおこの地域の地表面標高は 84.37 m から 137 m の間にある。

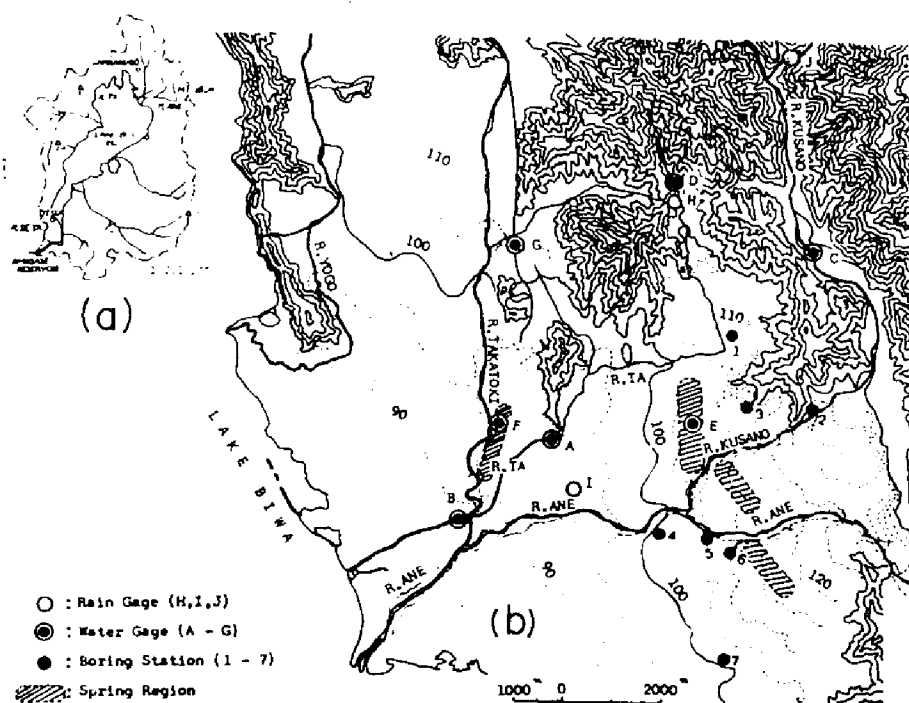


図 2.4.1 対象領域の概略図

4

図 2.4.1 に示されるようにこの地域の主要河川は姉川、高時川、草野川、田川であり、それぞれ次のような特性を有している。姉川、高時川、草野川は一部天井川である。この流域で調査観測をはじめて以来、姉川と高時川では表面水が涵涌したことはないが、草野川はその上流部に相当量の流水が認められても中流部ではときどき表面水が涵涌する。この草野川中流部での涵涌はカンガイ用水のための取水と扇状地部への浸出が主な原因と考えられている。田川は田川流域のほぼ中央部の低地部を走り、高時川の下を通過して琵琶湖に流入している排水河川である。

平地部は前述諸河川によって形成された扇状地とみられるが、その上流部が扇状地形をとどめているのに対し、下流部はこれらの扇状地の区別はむずかしく、一応これらの複合扇状地とみなされる。すなわち、たとえば姉川周辺部については、姉川によって造られた扇状地に草野川によって造られた扇状地が重なっているように思われ、また姉川、高時川合流点近傍はこれらの複合扇状地とみられる。

図 2.4.1 に示すように草野川によって形成された姉川扇状地上の小扇状地の末端部には落差型

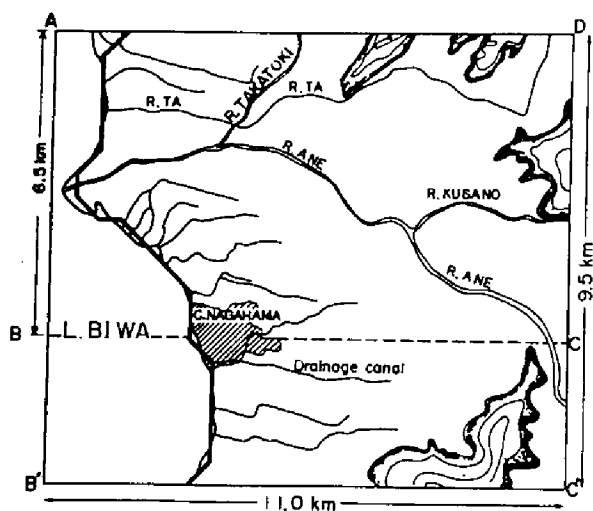


図 2.4.2 解析領域 (平面図)

の自噴帯がある。この他にこの地域の被圧部に湧水の存在が認められ、これら湧泉帯の存在がその周辺部の地下水分布に与える影響は小さくないと考えられるが、²⁾この解析では考慮しないことにする。

1.3 地 層

この地域は姉川、高時川、草野川および田川によって造られた複合扇状地とみなされ、領域内の土層柱状図は図 2.4.3 に示すようである。

この土層柱状図は図 2.4.1 に示す各点において井戸掘削時に得られたものであり、土層判別用のものでないだけに精度には若干疑問はあるが、他の地域の資料と対比してそれほど大きな差はないようである。この柱状図からもわかるように不透層といえる基盤岩類の位置は相当深い。一般にこの地域の地層は表土を除くほとんどが砂礫によって構成され、一部粘土、スフモ、シルト層などがレンズ状に分布しているといわれている。

このような複雑な地層のもとに地下水流動を解析することはきわめてむずかしいので、ここではこの地域の特性を損わない程度に解析を容易にするため、複雑な地層を一様なものへ変換することを考える。すなわち、レンズ状に入り組んだ諸層を無限に分布しているとみなし、この各層の層厚 (d_m) と透水係数 (k_m) を用い、成層状と仮定された透水層を (2.4.1) 式により巨視的に定義される透水係数 (k_x, k_y) を用い、一様な透水層へ変換する。⁶⁾

$$k_x = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{k_m d_m}{d}}$$

..... (2.4.1)

$$k_y = \frac{d}{\sum_{m=1}^n \frac{d_m}{k_m}}$$

ここで k_x : 変換された一様な透水層の水平方向 (x 方向) の透水係数 (cm / sec)

k_y : 変換された一様な透水層の鉛直方向 (y 方向) の透水係数 (cm / sec)

d_m : 各層の厚さ (cm)

k_m : 各層の透水係数 (cm / sec)

d : 透水層の厚さ (cm)

n : 層の数

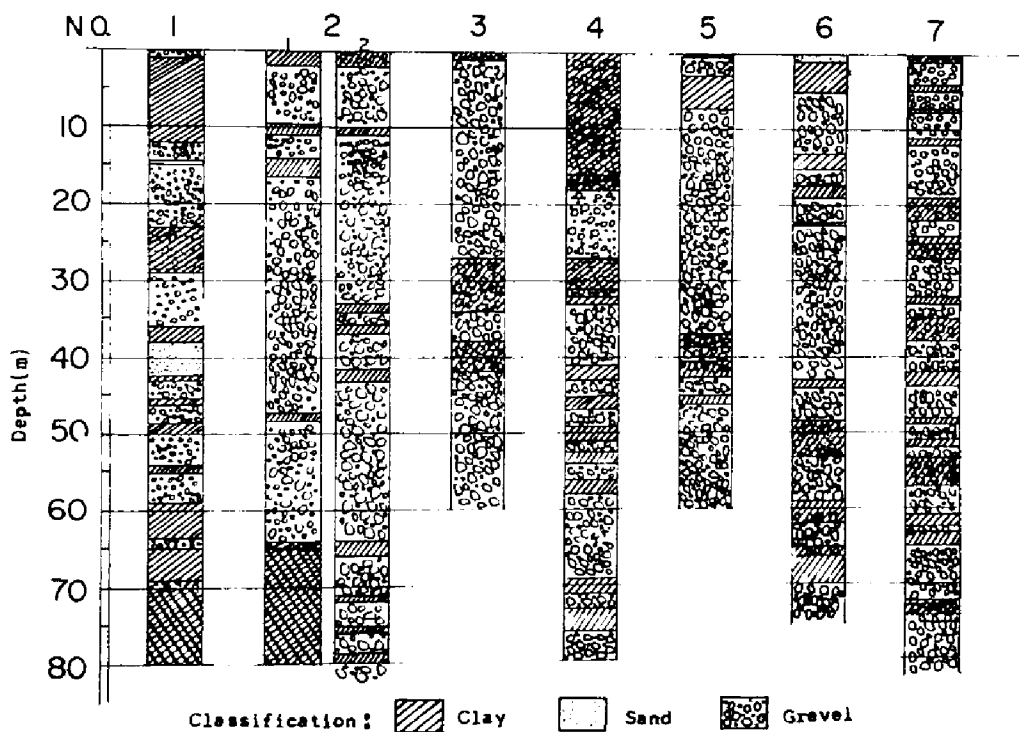


図 2.4.3 土層柱状図

図 2.4.3 に示す柱状図やこの地区周辺のボーリング柱状資料を用い、地表から 30 m の範囲について推算した結果

$$\frac{k_x}{k_y} = 551, 866, 900, 3620$$

の数値を得た。そこでこの解析では $k_x / k_y = 1000$ を採用した。

1.4 不透面

この対象領域においては、一般に不透層と考えられる基盤岩類の層は山地部を離れると急激に深くなり、ここで対象とする地表面付近の地下水の挙動解析のための不透層をどこにおいてよいかは現在はっきりしない。この種の地下水を対象として解析する場合、各種のモデルが考えられているが、ここでは実測値と解析結果から得られた地下水分布が一致するように不透面を試算により決定することにした。

1.5 解析条件

この領域の地下水位は絶えず変動していると考えられ、とくに草野川、姉川の上流部周辺での変動はかなり大きいことが認められる。琵琶湖水位低下の影響を検討する場合、渇水期に近い状態についての解析が望まれるが、その時期の実測結果はあまりなく、渇水安定状態とみなせる状況把握が行なえていない。ここでは定常状態に近い豊水期を選び、解析を進めることにする。

解析は、地表面、湖底、不透面、および周辺の境界で囲まれる三次元空間を水平方向を一辺 500 m、鉛直方向を 2 m の立体格子で区分し、次の条件を考慮して行なった。境界条件については図 2.4.2 に示す解析領域 ABCD の場合について示す。

- a) AB断面上：この断面での地下水位は琵琶湖水位と等しいとし、この断面の透水層を表わす格子点に琵琶湖水位を与える。
- b) BC断面上：地形および実測された地下水分布から判断して、この断面を横切る流れは存在しないものとし、この透水断面に不透面の条件を与える。
- c) CD断面上：この断面では山地部を除き地下水の流動が認められているので平地部に相当する透水断面に実測された地下水位を与える。山地部は解析領域外である。
- d) DA断面上：Dから高時川までの断面では、CD断面と同じ意味において、その平地部の透水断面に実測された地下水位を与える。高時川からA点までの断面では、BC断面と同じく、この透水断面の条件を与える。

なお、この領域における山地部からの水供給は無視しうるものとし、山地部を示す境界面に不透面の条件を与える。河川については、豊水期には常に河床に表流水が存在することを考え、河

川を近似している各格子点に河床高を与え、これを地下水高とした。

この地域の地下水は、河川水の他に揚水など人為的および土地被覆の影響を受けているようであるが、^{2),3)}今回はこれらをすべて無視した。

地表面については、難透水性の表層土が存在することを考慮し、この面に不透面の条件を与え、このモデルでは地表面高より高くなる地下水を被圧地下水として取り扱うことにした。

第2節 解析結果とその考察

第1節に述べたモデルにより解析を進めることにするが、かなり良い結果を得るまでには大きく別けて4段階の試算を必要とした。これを順に追って示す。

2.1 領域A B C Dについての解析(試算ⅠおよびⅡ)

解析領域を、水平方向を一边500mの正方形、鉛直方向を2mの立体格子で区分し、地表面、河川および湖底を立体格子点をとる直線で近似し三次元表示したものを図2.4.4に示す。この領域の湖底は判然としないので仮定することにした。試算Ⅱで用いた不透層の三次元表示したものを図2.4.5に示す。ここで解析領域は図2.4.4に示される地表面と図2.4.5に示される不透面にはさまれる三次元空間である。

解析は1967年8月1日の地下水を対象に行なった。なおその時の水文諸量の観測およびその後の地下水一斉調査などから、この時の地下水分布は豊水期のものを示していることが確認されている。

試算Ⅱの計算結果より、図2.4.6に地下水面分布を三次元的に表示する。図2.4.7に地下水の平面分布を実測値と比較して示す。図2.4.8に図2.4.2に示すB C断面の地下水面形と水頭分布を、また図2.4.9に図2.4.7に示すB B断面の地下水面形と水頭分布を図示する。

試算Ⅰでは不透面の位置をかなり浅く仮定したので、計算結果と実測値との間にかかなりの不一致が認められた。したがってここでは省略する。

試算Ⅱで得られた計算結果は、長浜周辺部を除きかなり良く実測値と一致している。長浜周辺部の地下水分布については計算値と実測値との間にかかなり差があり、地下水の形態についてもかなりの相違がある。すなわち、実測がB C地点までおよんでいないため詳細な点は不明であるが、この地域の地下水は backwater 形の水面形 (build-up curve) を呈しているのに対し、図2.4.6、図2.4.7にみられるように計算結果では低下背水形 (drop-down curve) となり、この地域の地下水が被圧状態にあるという実測結果とは一致するものの、かなりその形態を異にしている。この状態を修正するため、図2.4.6に示すように、第1回目の試算の場合よりとくに透水断面を大きく取ったが、この部分ではその効果はあまり現われなかった。この不自然と思え

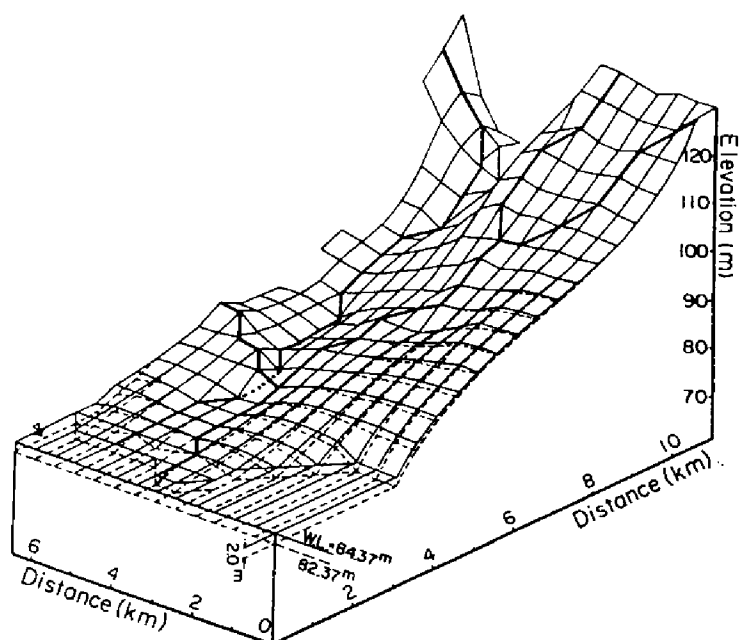


図 2.4.6 計算より得られた地下水面の三次元表示 (試算Ⅱ)

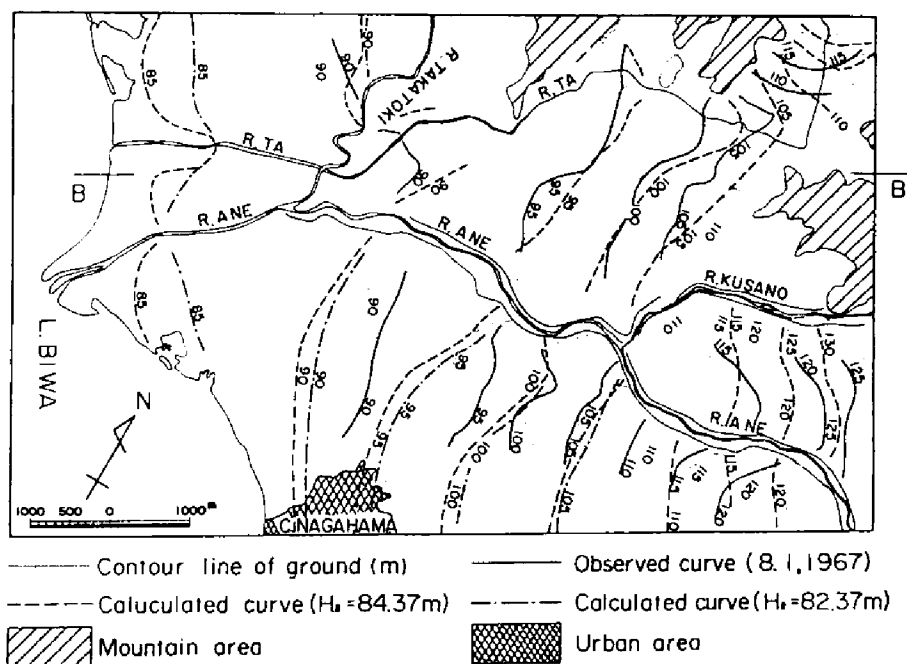


図 2.4.7 実測と計算より得られた地下水等高線 (試算Ⅱ)

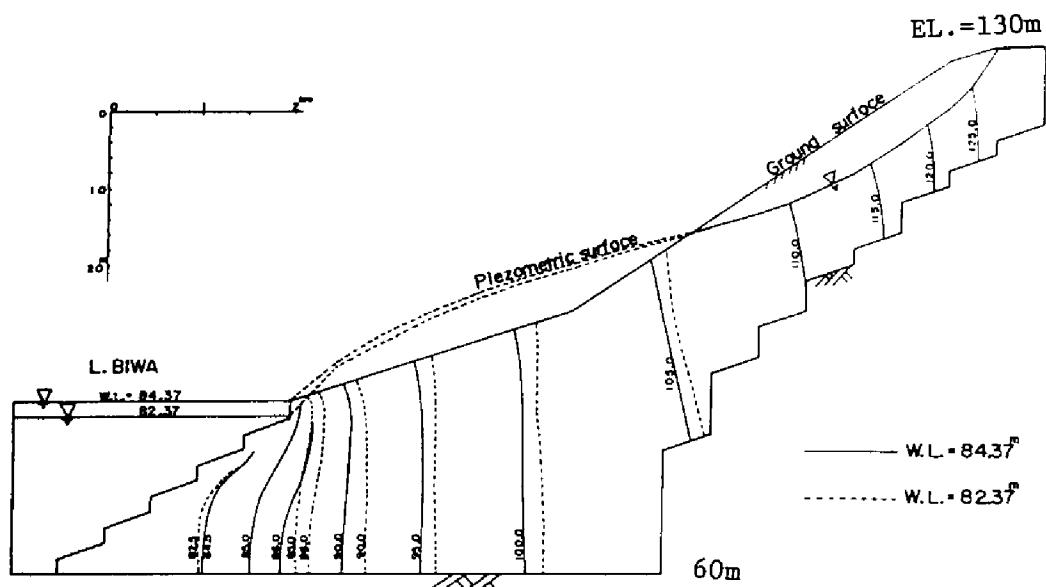


図 2.4.8 BC断面における地下水面と水頭分布(試算Ⅱ)

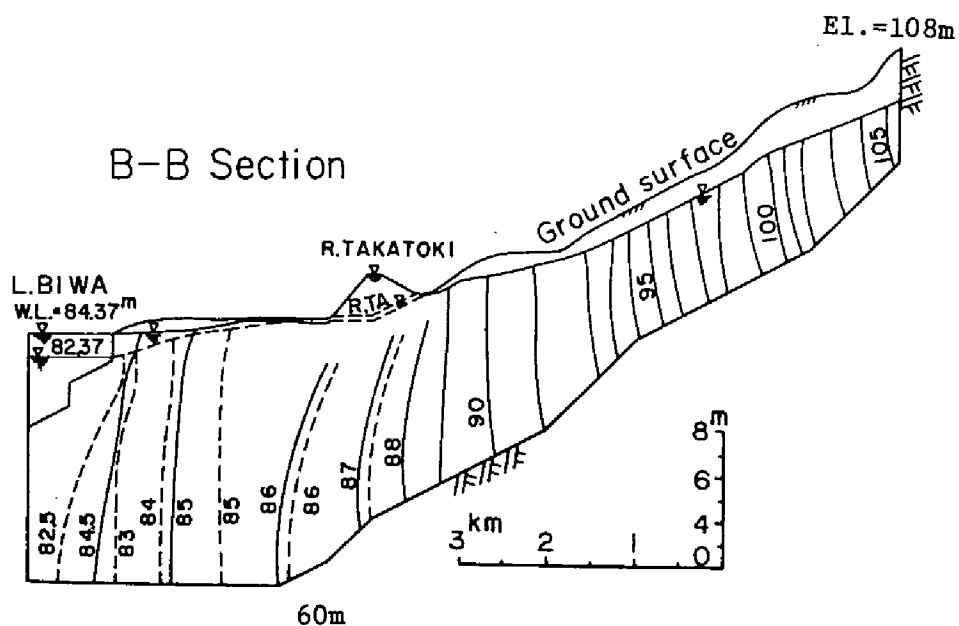


図 2.4.9 BB断面(図 2.4.7)における地下水面と水頭分布(試算Ⅱ)

る水位上昇はBC断面に不透面の条件を与えたことが原因と考えられる。

2.2 領域A'B'C'Dについての解析(試算Ⅲ)

試算Ⅰ,Ⅱでは長浜市周辺部の地下水分布は実測値とかなり隔たりがあり,定性的にも一致しているとはいえない。この不一致の原因はいくつか考えられるがその中で境界の位置と条件の与え方が不適当であることがまず考えられる。すなわち,試算Ⅱでは断面BCに不透面の条件を用いたが,実際にはBC断面を横切る地下水流を無視できない状態にあると推定される。そこで解析領域を図2.4.2に示すようにABCDからA'B'C'Dに拡大し,BC断面に与えたと同じ境界条件をB'C'面に適用し解析することにした。なお山地部は解析領域外である。C'D断面の境界条件はCD断面のものと同一である。

試算Ⅲで用いた解析領域A'B'C'Dの地表面,湖底面および不透面の三次元表示を図2.4.10および図2.4.11に示す。

この解析領域についての解析結果を地下水面分布について三次元的に示すと図2.4.12のようである。図2.4.13に地下水の平面分布を実測値と計算結果とを比較して示す。最後に図2.4.14に図2.4.13のAA断面における等水頭線と地下水面分布を示す。

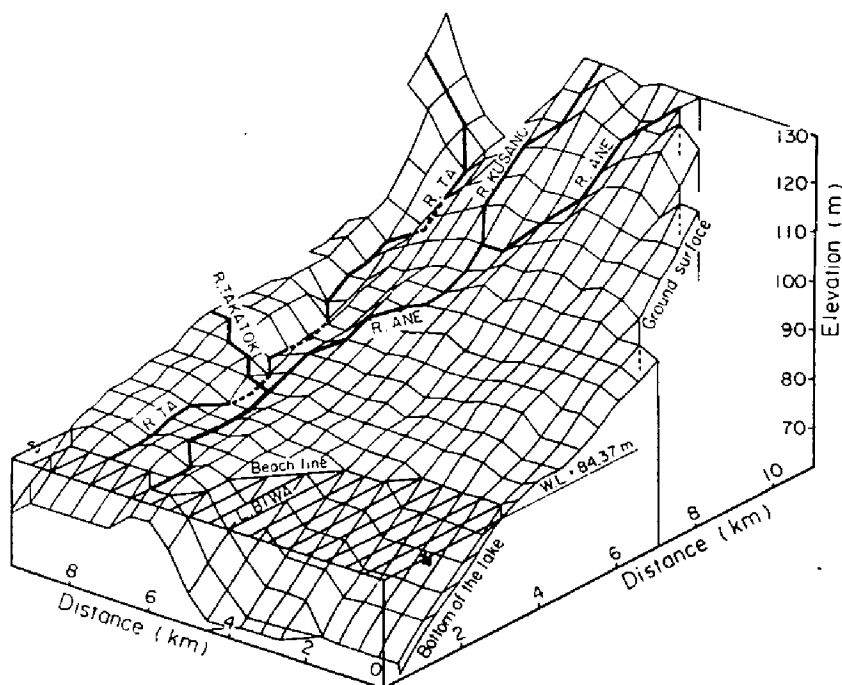


図 2.4.10 地表面および河川の三次元表示(試算Ⅲ)

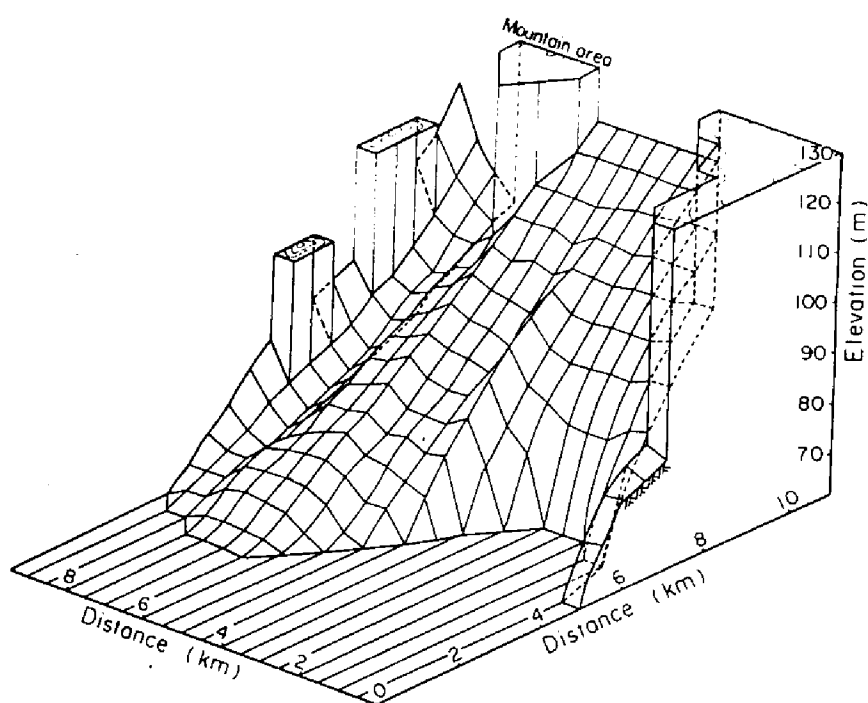


図 2.4.1.1 解析に用いた不透面の三次元表示 (試算Ⅲ)

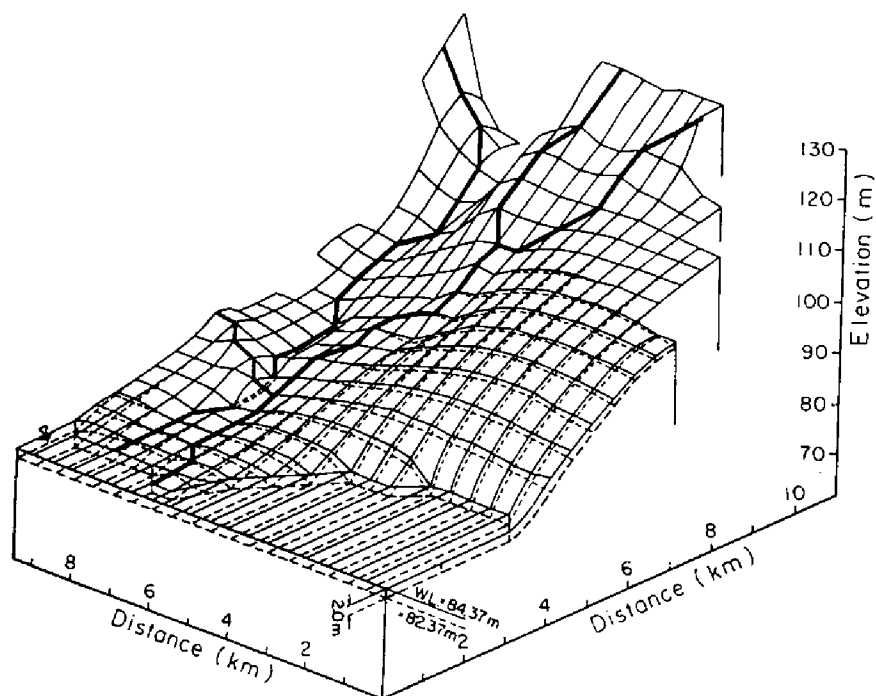


図 2.4.1.2 計算より得られた地下水面の三次元表示 (試算Ⅲ)

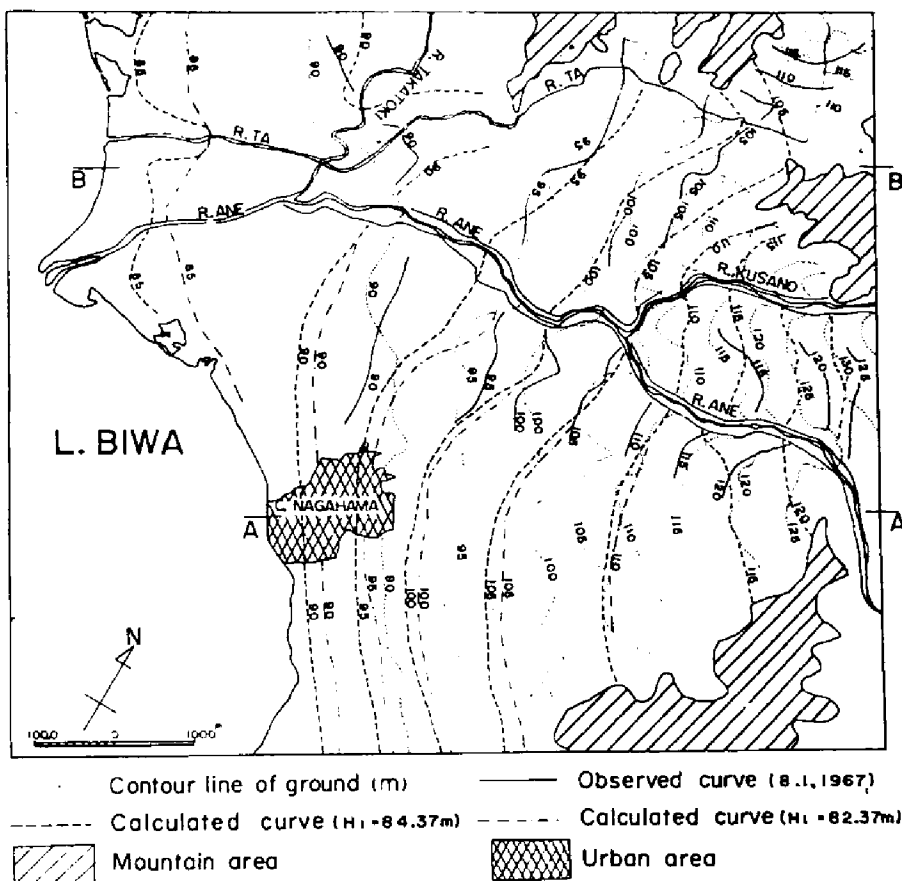


図 2.4.13 実測と計算より得られた地下水等高線(試算Ⅱ)

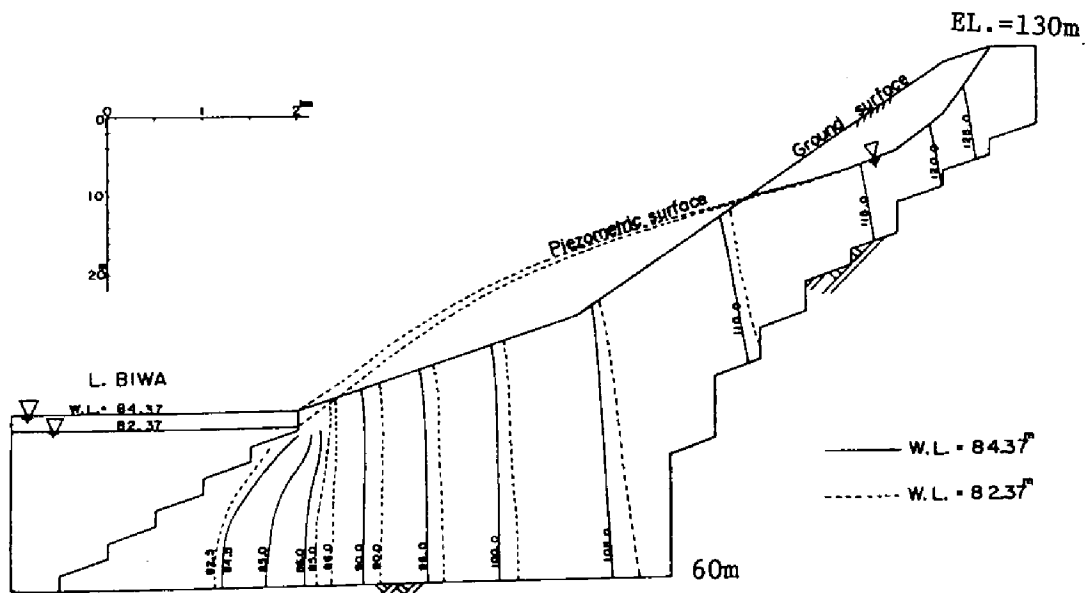


図 2.4.14 AA断面(図 2.4.13)における地下水面と水頭分布(試算Ⅱ)

試算Ⅲの解析結果について各図を用いて考察を加えると次のことが明らかになる。

図 2.4.12 および図 2.4.13 より、姉川より北側の領域では試算Ⅱにおける解析結果とほとんど等しく、図 2.4.13 に示す B-B 断面の水頭分布は図 2.4.9 に示すものとほとんど等しいことがわかる。したがって、この解析結果は試算Ⅱと同じ程度で実測値と一致しているといえる。ただ姉川より南側（B'-C' 断面側）の領域では試算Ⅱの場合と同じ傾向にあり、解析結果は実測結果と大きくかけはなれている。すなわち、図 2.4.14 に顕著に示されているとおり、図 2.4.13 の AA 断面における地下水位は試算Ⅱの場合と同様に被圧地下水の状態で低下背水型（drop-down curve）の水面形を呈している。この断面について試算Ⅱの結果と比較すると、被圧地下水面は試算Ⅱの場合より試算Ⅲの場合の方が高く、被圧領域も試算Ⅲの場合が若干であるが広いということが認められる。この理由として、試算Ⅱの場合は B-C 断面に対称の条件を用いることによって仮想的な B-C 断面より南側の領域に姉川の条件を暗黙の内に導入していることになり、結果的に地下水面分布を試算Ⅲの場合より下げる傾向にあったが、試算Ⅲにおいては対称軸が B'-C' になり、試算Ⅱでみられたような仮想的な姉川の効果はほとんど生じていないこと、そしてこれが試算Ⅱの場合より地下水位が上昇した形になっているものと考えられる。このことは解析領域を縮小することが望ましいということではなく、この解析領域の特有な現象であるといえよう。

2.3 中小排水河川を考慮した解析（試算Ⅳ）

試算Ⅲでは、姉川左岸部において、なお実測値と計算結果との間に不一致の点が残ったが、この点を修正するには、

- (1) 下流部の不透層の位置を深くし、透水断面を急に拡大する。
- (2) 解析領域内の中小排水河川の効果を検討する。

などの方策が考えられる。ここで透水層の断面を下流部で大きく取り、地下水位を下げることは試算ⅠとⅡとの間で検討したが、その結果を参考にすると不透層の修正では試算Ⅲで生じた地下水位上昇を低下させることは不可能であることが十分予想される。そこでモデルをなるべく単純にして現象を説明するという目的より若干はずれるが、とりあえず領域内に存在する中小排水河川を考慮することにより、この不一致を修正することにする。

図 2.4.16 にこの解析で考慮した中小排水河川を示す。これは国土地理院発行の 5 万分の 1 の地図より読み取ったものである。この河川のための解析条件としては田川における条件と同じように河床を地下水面にとった。ただこの場合河床高の実測値が得られていないので現地調査より地表面高から 1.0 m～0.5 m 低下させ推定した。なお入江、沼に相当する部分は潮水位を地下水位とした。なお解析で用いた地表面と不透面は試算Ⅲにおけるものと同じである。

この計算の結果得られた地下水面分布を図 2.4.15 に示す。図 2.4.16 には地下水の平面分布を実測結果と対比して示す。図 2.4.17 には図 2.4.16 の AA 断面における地下水面形と透水断面内の水頭分布を示す。なお図 2.4.16 に示す BB 断面の水頭分布は図 2.4.9 に示すものと等しかったので省略する。これらの図より、試算Ⅳで得られた地下水分布は解析領域のほぼ全体において実測結果とかなり良く一致していることが認められる。ただ姉川左岸の扇状地の中央部から上部の地域では、計算結果の方がやや実測地下水面より低くなっているが、これはこの領域の内陸部における排水河川の条件の取り方が十分でなかったためと考えられる。このように、いくつかの問題は残しているが、全般的にはこのモデルを用いることにより田川流域およびその周辺部の豊水期の地下水をかなり良く説明することができたと結論しうる。

そこで、このモデルを用い、琵琶湖水位が 2 m 低下した場合の解析を行ない、琵琶湖水位の低下が背後地地下水におよぼす影響を考察する。この場合の計算結果を図 2.4.15 ～ 2.4.17 に図示してある。この結果、琵琶湖水位低下の影響がおよぶ範囲は場所により異なるが、湖岸からほぼ 1 ～ 2 km であることがわかる。湖岸から 2 ～ 3 km の領域では姉川、高時川、田川その他中小河川が多数分布しているため、琵琶湖水位低下が田川流域地下水に与える影響は小さく、その

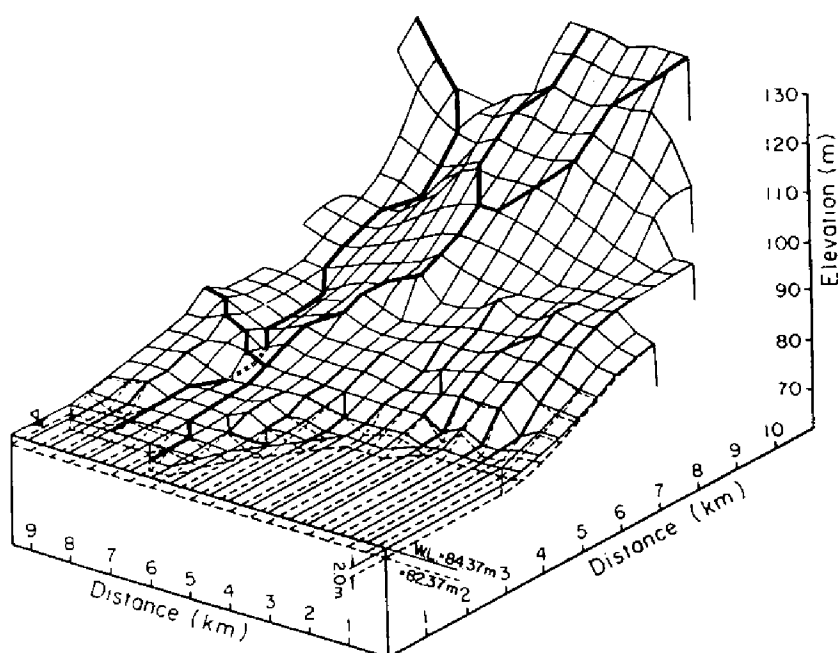


図 2.4.15 計算より得られた地下水面の三次元表示 (試算Ⅳ)

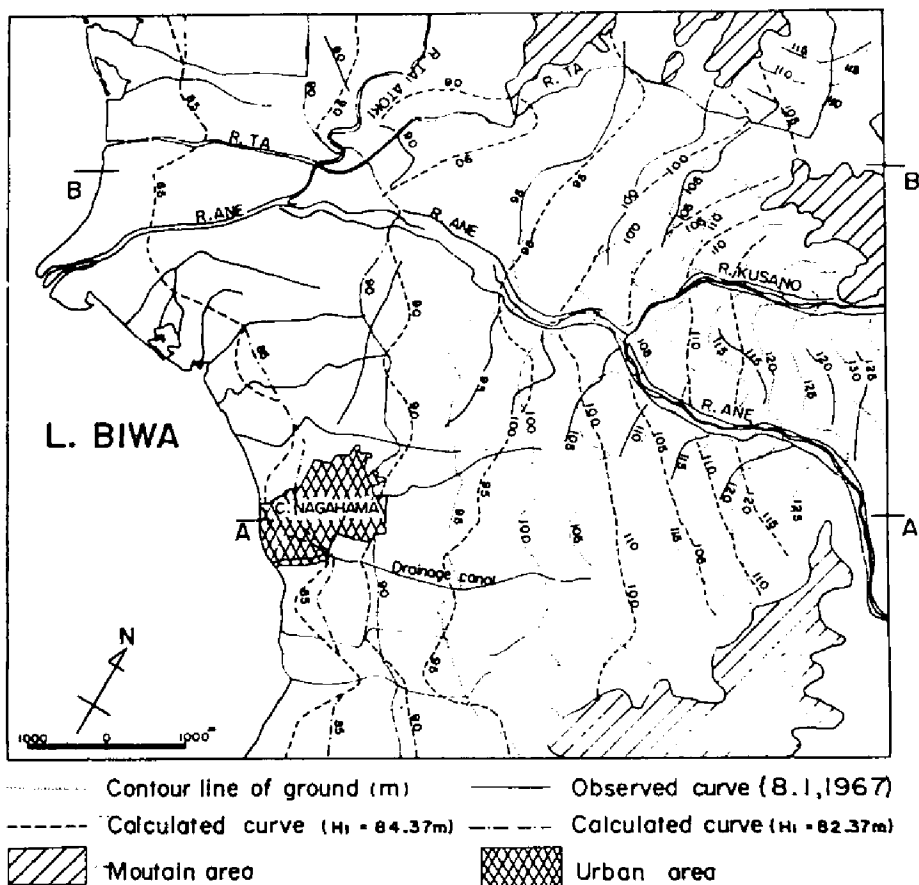


図 2.4.16 実測と計測より得られた地下水等高線 (試算Ⅳ)

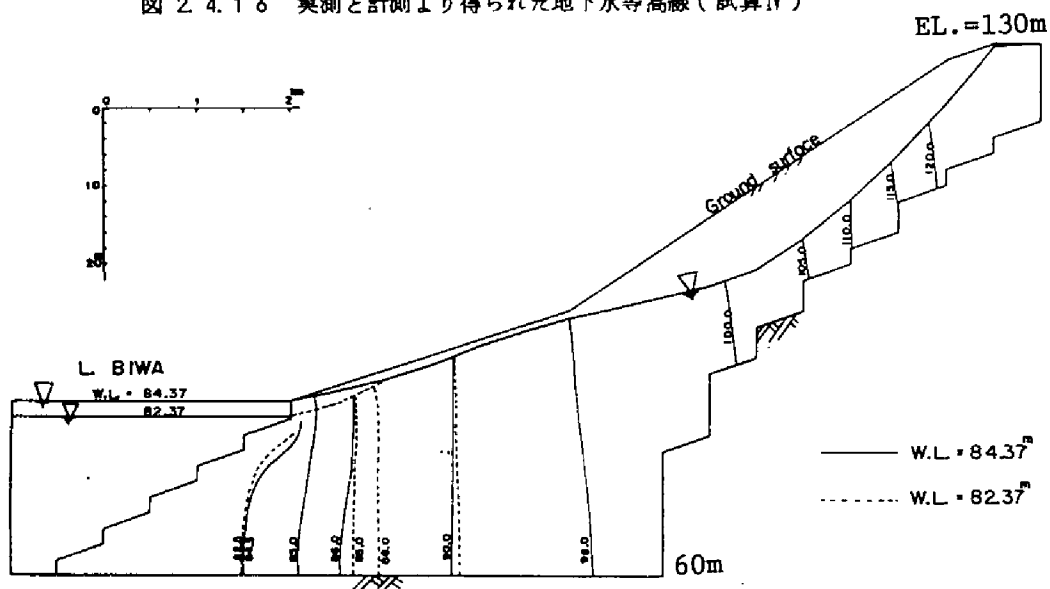


図 2.4.17 AA断面〔図2.4.16〕における地下水面と水頭分布 (試算Ⅳ)

低下量はほぼ10cm以下といえる。したがって、豊水期の田川流域内の地下水は、河川に表流水がある限り、琵琶湖水位の2m程度の低下ではその影響を受けないといつてよい。

試算Ⅱ、Ⅲの場合についても琵琶湖水位が2m低下した場合の計算を行なったが、その結果を各図に併示しておいた。現状における豊水期の地下水分布が必ずしも理論的に十分説明できているとはいえないので、これらについて考察することはあまり意味はないが、これらの場合には琵琶湖水位低下の影響は2～4km以上におよび、低下量もかなり大きい。試算Ⅳの場合と試算Ⅱ、Ⅲの場合とを比較すると、試算Ⅳの場合は中小排水河川の河床高を地下水位と考え、琵琶湖水位低下によっては影響されないとしたため、これが地下水低下の制約条件となったことが明らかになる。

このように、高時川、姉川、田川および周辺部の中小河川に表流水の存在することにより、田川流域内の地下水低下が抑制されること、および図2.4.12では全般的に地下水位は低下しているが、図2.4.15では中小排水河川の効果により、地下水低下が抑制されていることを考慮すると、この地域における琵琶湖水位低下に起因する地下水低下を防止、軽減する一つの方策として、琵琶湖岸近傍の排水河川の水位を現状状態に保持する施設を備えることが考えられる。

ここでは、第2章で提案した自由水面を有する浸透流の三次元解析法の広域地下水問題への適用例を示した。この種の問題は対象領域毎に問題の性格が異なるため一般的な論議は行ないにくい、本章で示した単純なモデルを用いてもかなり良く現象を説明することができると結論する。

参 考 文 献

- 1) 大橋行三・岡 太郎・角屋 睦・豊国永次・福島 晟：田川流域の地下水概況—田川流域の地下水に関する研究(I)—京都大学防災研究所年報，第12号B，pp. 381—390，昭和44年。
- 2) 岡 太郎・角屋 睦・豊国永次：湧水の挙動に関する研究—田川流域の地下水に関する研究(II)—京都大学防災研究所年報，第12号B，pp. 391—399，昭和44年。
- 3) 岡 太郎・角屋 睦：扇状地地下水の平面的挙動—田川流域の地下水に関する研究(III)—京都大学防災研究所年報，第13号B，pp. 161—169，昭和45年。
- 4) 稲田 裕・赤井浩一・宇野尚雄：琵琶湖周辺の地質地下水調査，土木学会誌，vol. 52，pp. 24—30，昭和42年。
- 5) 松尾新一郎・河野伊一郎：湖面などの変化に起因する自由地下水の水位変動の解析に関する研究，土木学会論文集，No 139，pp. 24—30，昭和42年。
- 6) Harr, M. E. : Ground Water and Seepage, McGraw Hill, p. 27, 1962.

第5章 結 論

本編では、自由水面を有する浸透流の三次元的解析手法を提示し、この解法について詳細な考察を行なった後、アースダム浸透流の三次元的地形効果を究明し、広域地下水問題への適応性について論議を行なった。その結果を要約すると次のようである。

第1章では、自由水面を有する浸透流の三次元解析手法の確立の重要性・必要性を指摘し、本研究の概要と過去の研究動向について述べた。

第2章では、まず三次元系における自由水面を有する浸透流の理論とその数値計算法を提示し、この解法を数例の二次元系に適用し、その既存解との対比より有用性を立証した。次にこの数値計算で使用する格子間隔・形状と精度および計算量軽減のために使用する加速係数など数値計算上の問題点を明らかにした。

第3章では、これまであまり検討が加えられていなかったアースダム浸透流の三次元的地形効果について述べた。ただ前章で提示した手法が数値解法であり、一般的な論議を行ないにくいいため、具体的な系を対象として検討を加えた。

まず第1節でV字谷に設置したアースダムにおいて、堤体下部に drain を設置した場合と設置しない場合の二つのケースについて解析を行ない、二次元流とした場合の解析結果と対比して、三次元的地形効果を明らかにした。すなわち、二次元流とした場合に比較して、自由水面は全体的に高い位置にあるが、ダム軸方向への顕著な傾きは示さず、等水頭面はかなり浸出面側に寄りその間隔は狭くなるという結果を得た。

第2節では、アースダム浸透流におよぼす地山の三次元的効果のあらわれ方と影響範囲について検討を加え、この計算結果から、アバットメントの傾斜が 45° の場合にその効果はもっとも大きく現われるが、その範囲はそれほど小さくなく、距離として堤高程度離れた位置になると三次元効果はほとんど無視しうるという結果を得た。

第4章では、対象領域に田川流域とその周辺部を選び、物理性を欠かさない程度に単純化し、この解法を適用して広域地下水問題について若干の検討を加えた。地形条件・境界条件に未解明な問題が多く、このモデルの適用上残された問題は少なくないが、このモデルを用いることによりかなり良く実際現象を説明することができた。

この研究の結果、いくつかの制約はあるが自由水面を有する三次元浸透流の解析が一応可能となり、盛土構造物および広域地下水に関連して提起される多くの浸透問題の解決のために有益な資料を提供する一つの方策が見い出せたと考えている。

あ と が き

以上、本論文は、水利施設に関する未解明な浸透問題のうち、non-Darcy流を考慮した基礎地盤浸透流問題および自由水面を有する三次元浸透流問題について理論的実験的に基礎研究を行なった結果をまとめたものである。

本研究は上記の浸透問題のごく一部を検討したものにすぎず、残された問題も少なくないが、この研究結果がこの種の問題の解決の一つの方法にでもなれば幸いである。

本研究の計算は京都大学計算センターのKDC-Ⅱおよび京都大学大型計算機センターのFACOM 230-60を使用して行なった。

最後に、本研究に当り、終始御指導・御鞭撻を賜った 沢田敏男教授・角屋 睦教授に対し謝意を表する次第である。